Huiswerk Lineaire algebra 1 voor 23 november, 2011

- **Opgave 1:**

  Bewijs propositie 8.10 uit het dictaat.

- **Opgave 2:** Elk van deze gevraagde bewijzen kan kort zijn.

  a) Zij A een $m \times n$ matrix over een lichaam F in row echelon form. Laat zien dat geldt $\dim R(A) + \dim \ker A = n$.

  b) Zij A een willekeurige $m \times n$ matrix over een lichaam F. Laat zien dat geldt $\dim R(A) + \dim \ker A = n$.

  c) Zij F een willekeurig lichaam, n een positief geheel getal en $U \subset F^n$ een deelruimte. Bewijs

  $$\dim U + \dim U^{\perp} = n.$$

  d) Bewijs dat U en $U^{\perp}$ complementaire ruimtes zijn dan en slechts dan als $U \cap U^{\perp} = \{0\}$.

  e) Bewijs dat er een inclusie $U \subset (U^{\perp})^{\perp}$ is.

  f) Bewijs $U = (U^{\perp})^{\perp}$.

  g) Laat zien dat voor $F = \mathbb{R}$ de ruimtes U en $U^{\perp}$ complementaire ruimtes zijn.

  h) Geef een voorbeeld van een lichaam F, een positief geheel getal n en een deelruimte $U \subset F^n$ waarvoor U en $U^{\perp}$ **geen** complementaire deelruimtes zijn. [Zie de sectie "computing intersections" en het eerste voorbeeld uit het dictaat van de toekomst.]

- **Opgave 3:** Zij F een willekeurig lichaam, n een positief geheel getal en $U_1, U_2 \subset F^n$ twee deelruimtes.

  a) Laat zien dat geldt $U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp} = (U_1 + U_2)^{\perp}$.

  b) Laat zien dat geldt $U_1 \cap U_2 = (U_1^{\perp} + U_2^{\perp})^{\perp}$.

- **Opgave 4:**

  Zij $U_1 \subset \mathbb{R}^3$ de ruimte voortgebracht door $(2, 1, -3)$ en $(3, 2, -2)$ en $U_2 \subset \mathbb{R}^3$ de ruimte voortgebracht door $(-1, 0, 2)$ en $(2, 1, -1)$. Gebruik de vorige opgave om voortbrengers voor de doorsnede $U_1 \cap U_2$ te bepalen.