Oplossingen tentamen 2008

(1) Ontwikkeling langs de tweede rij geeft

$$(-1) \cdot a \cdot (a \cdot (-4a) - 1 \cdot (-2)) + 0 + (-1) \cdot 2 \cdot (1 \cdot (-2) - a \cdot 1) = 4a^3 + 4$$

voor de determinant van C_a. Voor $a \neq -1$ is dit ongelijk aan 0 en heeft C_a dus volle rang, namelijk rang 3. Voor $a = -1$ hebben we

$$C_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

We (kunnen wel gaan vegen om de rang te bepalen, maar) we weten al dat de determinant 0 is, dus de rang is hooguit 2. Omdat de eerste twee rijen lineair onafhankelijk zijn (geen van de twee is een scalair veelvoud van de ander), is het ook minstens 2, dus de rang van C_{-1} is 2.

(2) (a) Er geldt

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T(x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T(x^3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Deze vectoren staan al geschreven ten opzichte van de standaardbasis, dus er geldt

$$[T]_E^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Zij P de matrix de met v_1, v_2, v_3 als rijen, dus

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Voordat we checken of C een basis is, merken we op dat als C inderdaad een basis is, dan geldt

$$[T]_C^B = [\mathrm{Id}]_C^E \cdot [T]_E^B = ([\mathrm{Id}]_E^C)^{-1} \cdot [T]_E^B,$$

terwijl in de matrix $[\mathrm{Id}]_E^C$ de vectoren v_1, v_2, v_3 als kolommen staan, dus $[\mathrm{Id}]_E^C = P^{\mathrm{t}}$. Omdat we de inverse van $[\mathrm{Id}]_E^C = P^{\mathrm{t}}$ nodig hebben, vegen we P^{t} in plaats van P om te checken of C een basis is (dit kan, want P en P^{t} hebben dezelfde rang). We kunnen dan tegelijk de inverse berekenen. De uitgebreide matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

is te vegen tot

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 8 \end{array}\right)$$

De matrix P en $P^{\mathrm{t}} = [\mathrm{Id}]_E^C$ hebben dus inderdaad rang 3, dus C is een basis en we lezen ook af dat geldt

$$[\mathrm{Id}]_C^E = ([\mathrm{Id}]_E^C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 5 \\ -3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

en dus is $[T]_C^B = ([\mathrm{Id}]_E^C)^{-1} \cdot [T]_E^B$ gelijk aan

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 5 \\ -3 & 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 & -3 \\ 6 & 7 & 3 & 7 \\ 9 & 11 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

(c) Voor $n \geq 2$ bevat P_n de polynomen 1, x en x^2 met beelden $(1,1,1)$, $(-1,0,1)$ en $(1,0,1)$ die lineair onafhankelijk zijn en dus $\mathbb{R}^3$ opspannen. Er geldt dus dat het beeld van T dimensie 3 heeft en uit

$$\dim \ker T + \dim \mathrm{im} T = \dim P_n = n + 1$$

volgt dan $\dim \ker T = (n+1) - 3 = n - 2$.

(3) (a) Het karakteristiek polynoom van A is gelijk aan de determinant van

$$t\mathrm{Id}_2 - A = \begin{pmatrix} t-1 & -2 \\ -2 & t+2 \end{pmatrix}$$

en dus gelijk aan $(t-1)(t+2) - 4 = t^2 + t - 6 = (t+3)(t-2)$. De eigenwaarden zijn dus 2 en -3. De eigenruimte bij eigenwaarde 2 is de kern van

$$2\mathrm{Id}_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

en die wordt voortgebracht door $v_1 = (2,1)$. De eigenruimte bij eigenwaarde -3 is de kern van

$$2\mathrm{Id}_2 - A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

en die wordt voortgebracht door $v_2 = (1,-2)$. Deze twee vectoren vormen een basis $B = (v_1, v_2)$. Vermenigvuldiging met A wordt ten opzichte van B gegeven door de diagonaalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

terwijl vermenigvuldiging met de matrix

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

met v_1 en v_2 als kolommen, de coëfficiëntenvector van een vector v ten opzichte van B overvoert in de coëfficiëntenvector van v ten opzichte van de standaardbasis. Er geldt dus

$$A = CDC^{-1} \qquad \text{en} \qquad D = C^{-1}AC.$$

(b) Er geldt

$$A^n = CD^nC^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \cdot 2^n + (-3)^n & 2 \cdot 2^n - 2 \cdot (-3)^n \\ 2 \cdot 2^n - 2 \cdot (-3)^n & 2^n + 4 \cdot (-3)^n \end{pmatrix}$$

(4) (a) Het vlak W is de kern van de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

en deze wordt voortgebracht door de elementen

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In plaats van v_1, v_2 kunnen we als voortbrengers ook v_1 en v_2' gebruiken, met $v_2' = v_2 - cv_1$ voor willekeurige scalar c en voor $c = \langle v_1, v_2 \rangle / \langle v_1, v_1 \rangle = -2/2 = -1$ geldt dat v_1 en v_2 loodrecht op elkaar staan (er geldt immers dat cv_1 de projectie van v_2 op v_1 is). We krijgen dan dus

$$v_2' = v_2 + v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

en v_1 en v_2' vormen een orthogonale basis. Als we de vectoren normaliseren tot

$$v_1' = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (1, 0, 1)$$

en

$$v_2'' = \frac{1}{\|v_2\|} v_2' = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot (-1, 1, 1),$$

dan vormen v_1' en v_2'' een orthonormale basis.

(b) De projectie van b op de normaalvector $n = (1, 2, -1)$ van W is gelijk aan

$$b_2 = \frac{\langle n, b \rangle}{\langle n, n \rangle} \cdot n = \frac{-6}{6} \cdot n = -n = (-1, -2, 1).$$

En voor $b_1 = b - b_2 = (-2, 1, 0)$ geldt dan $b = b_1 + b_2$ en $b_1 \in W$.

(c) Er geldt

$$\begin{aligned} \|b - x\|^2 &= \langle b - x, b - x \rangle = \langle b_2 + (b_1 - x), b_2 + (b_1 - x) \rangle \\ &= \langle b_2, b_2 \rangle + 2 \cdot \langle b_2, b_1 - x \rangle + \langle b_1 - x, b_1 - x \rangle \\ &= \|b_2\|^2 + 0 + \|b_1 - x\|^2 \geq \|b_2\|^2, \end{aligned}$$

waarbij de gelijkheid $\langle b_2, b_1 - x \rangle = 0$ volgt uit het feit dat $b_2 \in W^\perp$ en $b_1 - x \in W$ loodrecht op elkaar staan. Omdat $\|b - x\|$ en $\|b_2\|$ niet negatief zijn, volgt $\|b - x\| \geq \|b_2\|$.

(d) Die afstand is gelijk aan $\|b_2\| = \sqrt{6}$.

(5) (a) Voor $x, y \in \mathbb{R}^n$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt

$$\begin{aligned} L(x+y) &= \langle a, x+y \rangle \cdot b = (\langle a, x \rangle + \langle a, y \rangle) \cdot b \\ &= \langle a, x \rangle \cdot b + \langle a, y \rangle \cdot b = L(x) + L(y) \end{aligned}$$

en

$$L(\lambda x) = \langle a, \lambda x \rangle \cdot b = \lambda \langle a, x \rangle \cdot b = \lambda L(x),$$

dus L is lineair.

(b) De afbeelding $L^2 = L \circ L$ wordt gegeven door

$$L^2(x) = L(\rangle a, x \langle \cdot b) = \rangle a, x \langle \cdot L(b),$$

want $\rangle a, x \langle$ is een scalair en L is lineair. Omdat $\langle a, b \rangle = 0$, geldt $L(b) = 0$, en dus $L^2(x) = L(L(x)) = 0$ voor ale x.

(c) Als λ een eigenwaarde is van L, dan is λ^2 een eigenwaarde van $L^2 = 0$, dus volgt $\lambda^2 = 0$ en daarmee $\lambda = 0$. De waarde 0 is inderdaad ook een eigenwaarde, want er geldt $L(b) = 0 = 0 \cdot b$.

(d) Als L diagonaliseerbaar was, dan zou er een basis van eigenwaarden zijn. Omdat 0 de enige eigenwaarde is van L, zou elke vector in zo'n basis eigenwaarde 0 hebben en dus in de kern van L bevat zijn. Dit zou betekenen dat de kern van L de hele ruimte $\mathbb{R}^n$ is en dus dat L de nulafbeelding is. Dit is niet het geval, want $L(a) = b \neq 0$.

(6) Er geldt

$$\dim(V \cap W) + \dim(V + W) = \dim V + \dim W = 12.$$

Omdat $V + W$ bevat is in $\mathbb{R}^9$, geldt $\dim(V + W) \leq 9$ en dus $\dim(V \cap W) \geq 12 - 9 = 3$. Verder geldt dat gelijkheid ook kan optreden, bijvoorbeeld als V wordt voortgebracht door de eerste 5 standaardbasisvectoren voor $\mathbb{R}^9$ en W door de laatste 7. (Pas wel op, want in het algemeen kun je de doorsnede $V \cap W$ niet bepalen door de doorsnede te nemen van een basis van elk.) Krijgen dus $a = 3$.

(7) (a) Niet waar (als $n > m$, dan heeft de kern dimensie $n - m > 0$).

(b) Waar (de kern heeft dimensie $\dim \mathbb{R}^n - \dim \mathrm{im} L_A = n - n = 0$).

(c) Waar (het beeld $\mathrm{im} L_A \subset \mathbb{R}^m$ heeft dimensie m, dus $\mathrm{im} L_A = \mathbb{R}^m$).

(d) Niet waar (als $n < m$ dan is het beeld strikt kleiner dan $\mathbb{R}^m$).

(e) Niet waar (er geldt $[f \circ g]_C^B = [f]_C^X \cdot [g]_X^B$ voor een willekeurige basis X, maar in de opgave zijn de bases op de positie van de X'en niet geijk).

(f) Niet waat (de nulmatrix is een diagonaalmatrix, maar niet inverteerbaar).

(g) Waar (Voor inverteerbare P geldt

$$\begin{aligned} \det(t\mathrm{Id} - PAP^{-1}) &= \det(P(t\mathrm{Id})P^{-1} - PAP^{-1}) = \det P(t\mathrm{Id} - A)P^{-1} \\ &= \det P \cdot \det(t\mathrm{Id} - A) \det P^{-1}) = \det(t\mathrm{Id} - A) \end{aligned}$$

en dit laat zien dat de karaketeristieke polynomen van A en PAP^{-1} gelijk zijn).