Wiskundigen

Tentamen Lineaire Algebra 1

Donderdag 18 december 2008, 10.00-13.00

Geen rekenmachines. Motiveer elk antwoord (behalve bij vraag 7).

(1) Bepaal voor alle reële waarden van a de rang van de matrix

$$C_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -4a \end{pmatrix}.$$

(2) Zij $n \geq 2$ een geheel getal en laat P_n de vectorruimte zijn van alle polynomen met coëfficienten in $\mathbb{R}$ van graad ten hoogste n. Zij $T\colon P_n \to \mathbb{R}^3$ de lineaire afbeelding gegeven door

$$T(f) = \big(f(-1), f(0), f(1)\big).$$

Je hoeft niet te bewijzen dat T lineair is. Laat E de standaardbasis van $\mathbb{R}^3$ zijn en B de basis $(1, x, \ldots, x^n)$ van P_n.

(a) Bepaal de matrix $[T]_E^B$ in het geval dat $n = 3$.

(b) Zij $v_1 = (4, 1, 1)$, $v_2 = (0, 2, -1)$ en $v_3 = (1, -1, 1)$. Laat zien dat $C = (v_1, v_2, v_3)$ een basis is voor $\mathbb{R}^3$ en bepaal $[T]_C^B$ in het geval dat $n = 3$.

(c) Wat is de dimensie van de kern van T voor algemene $n \geq 2$?

(3) Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Geef een inverteerbare matrix C en een diagonaalmatrix D zodanig dat $D = C^{-1}AC$.

(b) Bereken A^n voor elk positief geheel getal n.

(4) Het vlak $W \subset \mathbb{R}^3$ is gegeven door $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ en b is de vector $(-3, -1, 1)$.

(a) Bepaal een orthonormale basis voor W (met betrekking tot het standaard inproduct).

(b) Bepaal $b_1 \in W$ en $b_2 \in W^\perp$ zodanig dat $b = b_1 + b_2$.

(c) Bewijs dat voor alle $x \in W$ geldt $||b - x|| \geq ||b_2||$. (Hint: Schrijf $b - x$ als $b_2 + (b_1 - x)$.)

(d) Bereken de afstand van het punt $(-3, -1, 1)$ tot W.

Op de volgende pagina staan meer opgaven.

(5) Zij n een positief geheel getal en $a, b \in \mathbb{R}^n$ vectoren zodanig dat $\langle a, a\rangle = \langle b, b\rangle = 1$ en $\langle a, b\rangle = 0$ (zoals gewoonlijk staat $\langle x, y\rangle$ voor het standaard inproduct op $\mathbb{R}^n$). De afbeelding $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wordt gegeven door

$$L(x) = \langle a, x\rangle \cdot b.$$

(a) Toon aan dat L een lineaire afbeelding is.
(b) Laat zien dat L^2 de nulafbeelding is.
(c) Toon aan dat 0 de enige eigenwaarde van L is.
(d) Leg uit of L diagonaliseerbaar is.

(6) Gegeven zijn deelruimtes V en W van $\mathbb{R}^9$ van dimensies $\dim V = 5$ en $\dim W = 7$. Geef een zo groot mogelijke a zodanig dat je zeker weet dat $\dim(V \cap W) \geq a$.

(7) WAAR of NIET WAAR? (geen uitleg nodig)
(a) Als A een $m \times n$ matrix is van rang m, dan is de lineaire afbeelding $L_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ x \mapsto Ax$ injectief.
(b) Als A een $m \times n$ matrix is van rang n, dan is de lineaire afbeelding $L_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ x \mapsto Ax$ injectief.
(c) Als A een $m \times n$ matrix is van rang m, dan is de lineaire afbeelding $L_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ x \mapsto Ax$ surjectief.
(d) Als A een $m \times n$ matrix is van rang n, dan is de lineaire afbeelding $L_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ x \mapsto Ax$ surjectief.
(e) Als V een eindig voortgebrachte vectorruimte is met bases B en C en $f\colon V \to V$ en $g\colon V \to V$ zijn lineaire afbeeldingen, dan geldt

$$[f]^B_C \cdot [g]^B_C = [f \circ g]^B_C.$$

(f) Als een vierkante matrix A diagonaliseerbaar is, dan is A inverteerbaar.
(g) Twee gelijkvormige (Engels: similar) vierkante matrices hebben hetzelfde karakteristieke polynoom.