Lineaire algebra I (wiskundigen)

Toets, donderdag 23 oktober, 2014

(1) Zij $V \subset \mathbb{R}^3$ het vlak
$$V = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 2x - 3y + z = 1 \,\}.$$
Bepaal de afstand van het punt $q = (-6, 5, 0) \in \mathbb{R}^3$ tot het vlak V.

(2) Bepaal voortbrengers voor de kern van de volgende matrix.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) Gegeven is de matrix
$$A = \begin{pmatrix} 4/9 & -4/9 & -7/9 \\ 8/9 & 1/9 & 4/9 \\ -1/9 & -8/9 & 4/9 \end{pmatrix}.$$
(a) Laat zien dat er geldt $A^4 = I_3$, waarbij I_3 de 3×3 identiteitsmatrix is.
(b) De afbeelding $r \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die $x \in \mathbb{R}^3$ stuurt naar $A \cdot x$ is een rotatie om een lijn L door de oorsprong 0. Bepaal deze lijn L. Dat wil zeggen, geef een voortbrenger van L.

(4) Zij W een vectorruimte over $\mathbb{R}$. Stel U_1, U_2, V_1, V_2 zijn deelruimtes van W en neem aan dat er geldt:
(i) $U_1 \subset V_1$ en $U_2 \subset V_2$,
(ii) $U_1 + U_2 = W$ en
(iii) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.
Bewijs dat er geldt $U_1 = V_1$ en $U_2 = V_2$.