Uitwerkingen Lineaire algebra I (wiskundigen)

Toets, donderdag 22 oktober, 2015

(1) **Antwoord.** Neem $a = (1, -3, 1)$, zodat er geldt
$$V = \{\, v \in \mathbb{R}^3 \ : \ \langle v, a\rangle = 2 \,\}.$$
Het vlak V gaat niet door $(0,0,0)$, dus we gaan eerst transleren. Neem bijvoorbeeld het punt $p = (0,0,2)$ in V en definieer
$$V' = \{v - p : v \in V\} = \{w \in \mathbb{R}^3 \ : \ \langle w + p, a\rangle = 2\} = \{w \in \mathbb{R}^3 \ : \ \langle w, a\rangle = 0\} = a^\perp$$
en $q' = q - p = (-4, 3, 2)$. Dan geldt
$$d(q, V) = d(q', V') = \|\pi_a(q')\| = \left\| \frac{\langle q', a\rangle}{\langle a, a\rangle} \cdot a \right\| = \left\| \tfrac{-11}{11} \cdot a \right\| = \|a\| = \sqrt{11}.$$

(2) **Antwoord.** Voor elke $v \in \mathbb{R}^3$ geldt
$$s(v) = v - 2\pi_a(v) = v - 2\frac{\langle a, v\rangle}{\langle a, a\rangle} \cdot a.$$
Omdat s een lineaire afbeelding is, is er inderdaad een matrix zoals gevraagd, en die matrix A heeft als kolommen de beelden van e_1, e_2 en e_3. We rekenen uit
$$s(e_1) = e_1 - 2\frac{\langle a, e_1\rangle}{\langle a, a\rangle} \cdot a = e_1 - 2 \cdot \tfrac{1}{9} a = \tfrac{1}{9} \cdot (7, -4, 4),$$
$$s(e_2) = e_1 - 2\frac{\langle a, e_2\rangle}{\langle a, a\rangle} \cdot a = e_2 - 2 \cdot \tfrac{2}{9} a = \tfrac{1}{9} \cdot (-4, 1, 8),$$
$$s(e_3) = e_1 - 2\frac{\langle a, e_3\rangle}{\langle a, a\rangle} \cdot a = e_3 - 2 \cdot \tfrac{-2}{9} a = \tfrac{1}{9} \cdot (4, 8, 1).$$
Zetten we deze als kolommen in een matrix, dan krijgen we
$$A = \tfrac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) **Antwoord.**

Omdat U_1 en U_2 deelruimtes zijn zit het element $0 = 0_V$ in allebei, dus ook in de doorsnede.

Stel $x, y \in U_1 \cap U_2$. Dan geldt $x, y \in U_1$ en $x, y \in U_2$. Omdat U_1 en U_2 deelruimtes zijn, volgt $x + y \in U_1$ en $x + y \in U_2$. Dus de som $x + y$ zit in allebei en er geldt $x + y \in U_1 \cap U_2$.

Stel $x \in U_1 \cap U_2$ en $\lambda \in \mathbb{R}$. Dan geldt $x \in U_1$ en $x \in U_2$. Omdat U_1 en U_2 deelruimtes zijn, volgt $\lambda x \in U_1$ en $\lambda x \in U_2$. Dus het scalaire veelvoud λx zit in allebei en er geldt $\lambda x \in U_1 \cap U_2$.

Hiermee zijn alle eisen voor het zijn van een lineaire deelruimte gecheckt, dus de doorsnede $U_1 \cap U_2$ is inderdaad een lineaire deelruimte.

(4) **Antwoord.** [Een voorbeeld van zo'n afbeelding t is de projectie op een lijn of hypervlak.]

(i) Voor elke $z \in \operatorname{im}(\mathrm{id}_W - t)$ is er een $w \in W$ met $z = w - t(w)$, dus geldt wegens lineariteit van t dat
$$t(z) = t(w - t(w)) = t(w) - t(t(w) = t(w) - (t \circ t)(w) = t(w) - t(w) = 0,$$
dus $z \in \ker t = V$. Hieruit volgt $\operatorname{im}(\mathrm{id}_W - t) \subset \ker t$.

(ii) (a) Stel $w \in W$ en definieer $u = t(w)$ en $v = w - t(w)$. Dan geldt $u \in \operatorname{im} t = U$ en wegens deel (i) geldt $v \in \ker t = V$. Omdat er geldt $w = u + v$, volgt dus $w \in U + V$. Omdat w willekeurig was, volgt $W \subset U + V$, dus $U + V = W$.

(b) Stel $w \in U \cap V$. Dan is er wegens $w \in U = \operatorname{im} t$ een $z \in W$ zodanig dat $w = t(z)$. Wegens $w \in V$ geldt $t(w) = 0$. Samen geeft dit $w = t(z) = (t \circ t)(z) = t(t(z)) = t(w) = 0$. Dus volgt $U \cap V = \{0\}$.

Uit (a) en (b) volgt dat U en V complementaire ruimtes zijn in W.