# Tentamen Lineaire algebra 1 voor wiskundestudenten

**25 maart 2010, 14:00–17:00**

Het tentamen is *geen* open-boek-tentamen.
Rekenmachines zijn niet toegestaan.

**Motiveer** al je antwoorden!

**Opgave 1.** Voor elk getal $x \in \mathbb{R}$ beschouwen we de matrix

$$A_x = \begin{pmatrix} x & 1 & x \\ 2 & -x & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Geef de inverse van $A_0$.

(b) Geef een basis voor de kern van $A_1$.

(c) Voor welke $x \in \mathbb{R}$ is $A_x$ inverteerbaar?

**Opgave 2.** Laat $L$ de lijn in $\mathbb{R}^3$ zijn door de oorsprong en het punt $(1, 2, 1)$.

(a) Bereken de afstand van het punt $(2, 0, 2)$ tot $L$.

(b) Zij $V$ het vlak door het punt $Q = (2, 1, 3)$ dat loodrecht staat op de lijn door de oorsprong en $Q$. Bereken het snijpunt van $L$ en $V$.

**Opgave 3.** Definieer de matrix $A$ door

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Wat is de rang van $A$?

(b) Geef een basis van de kern van $A$.

(c) Geef een basis van het beeld van $A$.

**Opgave 4.** Is de matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

diagonaliseerbaar?

**Opgave 5.** Beschouw de matrix $A = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ -12 & -10 \end{pmatrix}$.

(a) Wat zijn de eigenwaarden en eigenruimten van $A$?

(b) Geef een inverteerbare matrix $C$ en een diagonaalmatrix $D$ zodat $A = CDC^{-1}$.

**Opgave 6.** Zij $n$ een positief geheel getal. Identificeer het Cartesisch product $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ met $\mathbb{R}^{2n}$ door $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ met $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en $y = (y_1, \ldots, y_n)$ te identificeren met $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Gegeven twee lineaire afbeeldingen $f, g \colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ definiëren we de lineaire afbeelding

$$h \colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$$

door $h(v) = (f(v), g(v))$. Je hoeft niet te laten zien dat $h$ een lineaire afbeelding is. Laat zien dat $h$ een isomorfisme is dan en slechts dan als er geldt $\ker f \cap \ker g = \{0\}$.

**Opgave 7.** Voor de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & -2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

is de afbeelding $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die een vector $v$ stuurt naar $Av$ een spiegeling in een vlak (dit hoef je niet te bewijzen).

(a) In welk vlak is dit een spiegeling?

(b) Wat is de matrix (ten opzichte van de standaardbasis) behorende bij de afbeelding $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die elk punt projecteert op dit vlak?