Hertentamen Lineaire Algebra 1 (Wiskundigen)

Donderdag, 24 maart 2011, 14.00-17.00

Geen rekenmachines. Motiveer elk antwoord.

(1) (a) Bepaal voor alle reële waarden van a de rang van de matrix

$$C_a = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ 2a & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Is C_a inverteerbaar voor $a = -2$? Zo nee, geef aan waarom niet; zo ja, geef de inverse.

(2) Zij $V \subset \mathbb{R}^3$ het vlak dat het punt $(0, 1, 0)$ bevat en dat loodrecht staat op de vector $n = (-1, -3, 2)$. Bereken de afstand van het punt $P = (3, 3, 1)$ tot V.

(3) Beschouw weer de matrix C_a met $a = -2$ uit opgave 1. Laat v_1, v_2 en v_3 de rijen zijn van deze matrix.

(a) Laat zien dat v_1, v_2 en v_3 een basis vormen voor $\mathbb{R}^3$.

(b) Zij $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de lineaire afbeelding waarvoor geldt

$$T(v_1) = v_1, \qquad T(v_2) = 2v_2, \qquad T(v_3) = -v_3.$$

Bepaal de matrix $[T]_E^E$ die T beschrijft ten opzichte van de standaard basis E.

[Je mag het antwoord, als je dat wilt, geven als product van matrices zonder dat product verder uit te werken, dus bijvoorbeeld als "ABC" voor specifieke matrices A, B en C die je dan natuurlijk wel expliciet moet geven.]

(c) Wat is de determinant van T?

Op de volgende pagina staan meer opgaven.

(4) Gegeven zijn een lichaam F en twee lineaire afbeeldingen

$$f, g\colon F^{13} \to F^5.$$

Laat zien dat er een vector $v \in F^{13}$ is met $v \neq 0$ en

$$f(v) = g(v) = 0.$$

Vermeld duidelijk welke stellingen je gebruikt.

(5) Zij

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & r \end{pmatrix} \; : \; p, q, r \in \mathbb{R} \right\} \subset M(2 \times 2, \mathbb{R})$$

de vectorruimte van alle reële 2×2 bovendriehoeksmatrices.

(a) Laat zien dat de matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

een basis $B = (M_1, M_2, M_3)$ vormen voor V.

(b) Gegeven zijn drie reële getallen $a, b, c \in \mathbb{R}$ en de matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Laat zien dat er een afbeelding $f\colon V \to V$ is, gegeven door $f(M) = AM$, en dat deze afbeelding lineair is.

(c) Bepaal de matrix $[f]_B^B$ die f beschrijft ten opzichte van de basis B.

(d) Wat is de determinant van f?

(e) Laat zien dat f een isomorfisme is dan en slechts dan als $ac \neq 0$.