

Tentamen Lineaire Algebra 1, 24 januari 2012, 10:00 – 13:00

Motiveer steeds je antwoord. Rekenmachine en dictaat zijn niet toegestaan. Er zijn in totaal 50 punten te halen.

Opgave 1 (8pt).

- (a) Geef een vergelijking voor het vlak $V \subset \mathbf{R}^3$ dat de punten $(2, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ en $(-1, 1, 1)$ bevat.
- (b) Bereken de afstand van het punt $(3, 3, 3) \in \mathbf{R}^3$ tot het vlak $W \subset \mathbf{R}^3$ gegeven door $2x + y + z = 0$.

Opgave 2 (10pt). Voor alle reële getallen a wordt de afbeelding $C_a : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ gegeven door de matrix

$$\begin{pmatrix} a+2 & -4 & 4 \\ 4 & a-6 & 4 \\ 2 & -2 & a \end{pmatrix}.$$

- (a) Voor welke waarden van a is C_a inverteerbaar?
- (b) Reken de inverse van C_1 uit.
- (c) Geef een basis voor de kern en het beeld van C_2 .

Opgave 3 (10pt). Zij A de matrix

$$A = \begin{pmatrix} -17 & 9 \\ -30 & 16 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bepaal alle eigenwaarden van A en bepaal voor elke eigenwaarde een basis voor de bijbehorende eigenruimte.
- (b) Bepaal een diagonaalmatrix D en een inverteerbare matrix P zodanig dat geldt $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.
- (c) Bereken A^{2013} . In je antwoord mag je uitdrukkingen zoals 3^{2013} laten staan.

Opgave 4 (8pt). Zij $U_1 \subset \mathbf{R}^3$ het vlak opgespannen door de vectoren $(1, 3, 0)$ en $(2, 2, 2)$. Zij $U_2 \subset \mathbf{R}^3$ het vlak gegeven door $x + y + z = 0$. Bepaal een basis voor de doorsnede $U_1 \cap U_2$.

Opgave 5 (4pt). Gegeven zijn twee surjectieve lineaire afbeeldingen $f, g : \mathbf{R}^{11} \rightarrow \mathbf{R}^4$. Bewijs: $\ker f \cap \ker g \neq 0$.

Opgave 6 (5pt). Geef een voorbeeld van een reële vectorruimte V en een lineaire afbeelding $L : V \rightarrow V$ zodanig dat elke $\lambda \in \mathbf{R}$ een eigenwaarde van L is.

Opgave 7 (5pt). Zij $A : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ een lineaire afbeelding met n verschillende reële eigenwaarden, en $B : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ een lineaire afbeelding die met A commuteert, dat wil zeggen, $AB = BA$. Bewijs dat B diagonaliseerbaar is.