Naam:

Wiskundigen

Toets Lineaire Algebra 1

donderdag 23 oktober 2008, 10.00-12.00

(1) Gegeven zijn de matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ en de vector $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(a) Is de matrix A inverteerbaar? Zo ja, bepaal de inverse van A.

(b) Bepaal alle $x \in \mathbb{R}^3$ waarvoor geldt $Ax = b$.

(2) Laat $S_{2\times 2}$ de verzameling van alle symmetrische reële 2×2-matrices zijn.

(a) Laat zien dat $S_{2\times 2}$ een deelruimte is van $M_{2\times 2}$, de vectorruimte van alle 2×2-matrices met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging.

(b) Toon aan dat

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

een (ongeordende) basis is voor $S_{2\times 2}$.

(c) Wat is de dimensie van $S_{2\times 2}$?

(3) Waar of niet waar? (geen uitleg nodig)

(a) Als A en B twee $n \times n$-matrices zijn en AB is de nulmatrix, dan is BA ook de nulmatrix.

(b) Als A en B twee $n \times n$-matrices zijn en AB is inverteerbaar, dan zijn A en B beide ook inverteerbaar.

(c) Als U en V deelruimtes zijn van een vectorruimte W, dan is de vereniging $U \cup V$ ook een deelruimte.

(d) Zij V een vectorruimte. Als $v_1, \ldots, v_n \in V$ lineair onafhankelijk zijn, dan is $T = \{v_1, \ldots, v_n\}$ een (ongeordende) basis voor $\mathrm{Sp}(T)$.

(4) Zij m een positief geheel getal. Bepaal de afstand van het punt

$$P = (1, 2, 1, 2, \ldots, 1, 2) \in \mathbb{R}^{2m}$$

tot de lijn

$$L = \{(r, r, \ldots, r) \mid r \in \mathbb{R}\}.$$

(5) Zij n een positief geheel getal. Gegeven een verzameling $S \subset \mathbb{R}^n$ definiëren we

$$S^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \forall s \in S : s \perp v\}.$$

(a) Bewijs dat voor elke verzameling $S \subset \mathbb{R}^n$ de verzameling $S^\perp$ een deelruimte is.

(b) Gegeven is de verzameling

$$S_1 = \{(0, 2, 1, 1), (1, 2, 2, 1), (1, 0, 1, 0)\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Bepaal een basis voor $S_1^\perp$.