Lineaire algebra I (wiskundigen)

Toets, donderdag 21 oktober, 2010

(1) Zij V het vlak in $\mathbb{R}^3$ door de punten

$$P_1 = (1, 1, 0), \quad P_2 = (3, 0, 2) \quad \text{en} \quad P_3 = (0, 2, 1).$$

(a) Geef een parametrisatie voor V. Dat wil zeggen, vind vectoren p, v_1, v_2 zodanig dat geldt

$$V = \{p + sv_1 + tv_2 \ : \ s, t \in \mathbb{R}\}.$$

(b) Geef een vergelijking voor V.

(2) Gegeven de vectoren

$$\begin{aligned} v_1 =& (2, -1, 2), \\ v_2 =& (1, 0, 3), \\ w_1 =& (1, 3, 3), \\ w_2 =& (1, 1, 1) \end{aligned}$$

in $\mathbb{R}^3$. Zij V het vlak opgespannen door v_1 en v_2 en zij W het vlak opgespannen door w_1 en w_2, dus

$$\begin{aligned} V = L(v_1, v_2) &= \{sv_1 + tv_2 \ : \ s, t \in \mathbb{R}\}, \\ W = L(w_1, w_2) &= \{sw_1 + tw_2 \ : \ s, t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Bepaal een vector $x \neq 0$ in de doorsnede $V \cap W$.

(3) (a) Bepaal de afstand van het punt $Q = (1, 2, 2) \in \mathbb{R}^3$ tot het vlak gegeven door

$$2x + 2y - z = 1.$$

(b) Bepaal de hoek tussen de vectoren $(4, 2, -1, -2)$ en $(2, 0, 2, 1)$ in $\mathbb{R}^4$.

(4) Zijn de polynomen

$$f_1 = x^3 + 2x^2 + 1, \qquad f_2 = x^3 - x, \qquad f_3 = x - 1$$

lineair onafhankelijk in de vectorruimte van alle reële polynomen?

Zie achterkant voor meer opgaven!

(5) Zij V de vectorruimte over $\mathbb{R}$ van alle functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Je hoeft niet te laten zien dat V inderdaad een vectorruimte is. Definieer nu $U \subset V$ als de verzameling van alle functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f(n) = 0$ voor alle positieve gehele getallen n, dus

$$U = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{Z}_{>0} : f(n) = 0\}.$$

Laat zien dat U een deelruimte is van V.

(6) Laat U_1 en U_2 deelruimtes zijn van een vectorruimte V. Bewijs dat de vereniging $U_1 \cup U_2$ een deelruimte van V is dan en slechts dan als geldt $U_1 \subset U_2$ of $U_2 \subset U_1$.