TOETS LINEAIRE ALGEBRA 1 - 24 OKTOBER 2013

Motiveer steeds je antwoord. Veel succes!

Vraag 1. Laat V de vectorruimte over $\mathbb{R}$ zijn van alle oneindige rijtjes

$$(x_n)_{n\geq 0} = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$$

met elementen in $\mathbb{R}$, dus

$$V = \{(x_n)_{n\geq 0} \,:\, x_n \in \mathbb{R} \text{ voor alle } n \geq 0\},$$

met de gebruikelijke optelling en schaling, d.w.z. elementsgewijs. Beschouw de deelverzameling $S \subset V$ gegeven door

$$S = \{(x_n)_{n\geq 0} \in V \,:\, x_n + x_{n+2} = 0 \text{ voor alle } n \geq 0\}.$$

(a) Laat zien dat de nulrij $(0)_{n\geq 0}$ in S zit.
(b) Geef nog een voorbeeld van een ander element $(x_n)_{n\geq 0} \neq (0)_{n\geq 0}$ in S.
(c) Laat zien dat S een lineaire deelruimte is van V. Je hoeft niet te bewijzen dat V een vectorruimte is.

Oplossing:
(a) Voor de nulrij geldt voor iedere $n \geq 0$ dat $x_n = x_{n+2} = 0$, dus $x_n + x_{n+2} = 0$. Dus $(0)_{n\geq 0} \in S$.
(b) Als je x_0 en x_1 kiest, dan ligt de rest van het rijtje vast. Neem bijvoorbeeld $x_0 = 1$ en $x_1 = 2$. Dan zit het rijtje

$$(1, 2, -1, -2, 1, 2, -1, -2, \ldots)$$

in S.
(c) In (a) hebben we al laten zien dat de nulrij in S zit. We moeten daarom alleen nog laten zien dat S gesloten is onder optelling en schaling.

- Optelling: Neem twee rijtjes $x = (x_n)_{n\geq 0}$ en $y = (y_n)_{n\geq 0}$ in S. Voor de componenten van de som $x + y = (z_0, z_1, z_2, ...)$ geldt $z_n = x_n + y_n$ voor alle $n \geq 0$. Dat geeft

$$\begin{aligned} z_n + z_{n+2} &= (x_n + y_n) + (x_{n+2} + y_{n+2}) \\ &= (x_n + x_{n+2}) + (y_n + y_{n+2}) = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

  Dus $x + y \in S$.
- Schaling: Neem een factor $\lambda \in \mathbb{R}$ en een rijtje $x = (x_n)_{n\geq 0} \in S$. Voor de componenten van $\lambda x = (z_0, z_1, z_2, ...)$ geldt $z_n = \lambda x_n$ voor alle $n \geq 0$. Dat geeft

$$z_n + z_{n+2} = \lambda x_n + \lambda x_{n+2} = \lambda(x_n + x_{n+2}) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

  Dus $\lambda x \in S$.

Dit betekent dat S voldoet aan de voorwaarden van Definitie 2.1 en daardoor een lineaire deelruimte van V is.

Vraag 2. Laat $a = (-1, 0, 2)$ en $v = (6, 3, -2)$ twee vectoren in $\mathbb{R}^3$ zijn.
(a) Schrijf v als de som van twee vectoren $v = v_1 + v_2$ waarbij v_1 een veelvoud is van a en v_2 loodrecht staat op a.
(b) Wat is de spiegeling (reflection) van v in het vlak $W \subset \mathbb{R}^3$ gegeven door

$$W = \{w \in \mathbb{R}^3 \,:\, \langle a, w\rangle = 5\}?$$

Oplossing:
(a) We berekenen eerst v_1. Uit Gevolg 2.64 volgt dat $v_1 = \langle a, v\rangle \cdot \|a\|^{-2} a$. Er geldt

$$\|a\|^2 = \langle a, a\rangle = (-1)^2 + 0^2 + 2^2 = 5$$

en

$$\langle a, v\rangle = -1\cdot 6 + 0\cdot 3 + 2\cdot(-2) = -10.$$

Dit geeft

$$v_1 = \frac{-10}{5}a = -2(-1,0,2) = (2,0,-4)$$

en dat betekent dat

$$v_2 = v - v_1 = (6,3,-2) - (2,0,-4) = (4,3,2).$$

Als extra controle kun je nog nagaan of $\langle a, v_2\rangle = 0$ en dat klopt in dit geval.
(b) Het vlak W gaat niet door de oorsprong en het punt $p = (-5,0,0)$ ligt in W. We verplaatsen daarom eerst alles over $-p$. Dit geeft $\tilde{v} = v - p = (6,3,-2) - (-5,0,0) = (11,3,-2)$ en

$$\tilde{W} = \{w - p \,:\, w \in W\} = \{a\}^{\perp}.$$

De spiegeling van $\tilde{v}$ in $\tilde{W}$ is nu

$$\tilde{v}' = \tilde{v} - 2\frac{\langle \tilde{v}, a\rangle}{\langle a, a\rangle}a = (11,3,-2) - 2\frac{-11+0-4}{5}(-1,0,2) = (11,3,-2) + (-6,0,12) = (5,3,10).$$

Nu vinden we de spiegeling van v in W door $\tilde{v}'$ weer terug te verplaatsen over p, dus

$$v' = \tilde{v}' + p = (5,3,10) + (-5,0,0) = (0,3,10).$$

Vraag 3. Gegeven is de afbeelding $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) \mapsto (-x_2, -x_1)$. Dit betekent dat f de punten spiegelt in de lijn $x_2 = -x_1$.
(a) Laat zien dat f een $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding is.
(b) Wat is de matrix A die bij f hoort, dus zodat $f = f_A$?
(c) Is f injectief? Is f surjectief?
Laat $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de lineaire afbeelding zijn gegeven door $g(x_1, x_2) = (2x_1, x_2)$. Je hoeft niet te laten zien dat g een lineaire afbeelding is.
(d) Bereken de matrix B die hoort bij g, dus de matrix B zodat $f_B = g$.
(e) Wat is de matrix die hoort bij de afbeelding $f \circ g$? Geldt dat $f \circ g = g \circ f$?

Oplossing:
(a) Volgens Definitie 3.1 moeten we hiervoor twee dingen nagaan:

- Voor alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ moet gelden $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Neem hiervoor twee elementen $x = (x_1, x_2)$ en $y = (y_1, y_2)$ in $\mathbb{R}^2$. Dan is $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ en
$$\begin{aligned} f(x+y) &= \big(-(x_2+y_2), -(x_1+y_1)\big) = (-x_2 - y_2, -x_1 - y_1) \\ &= (-x_2, -x_1) + (-y_2, -y_1) = f(x) + f(y). \end{aligned}$$
- Voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ en alle $x \in \mathbb{R}^2$ moet gelden $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Neem hiervoor $\lambda \in \mathbb{R}$ en $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Dan is $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2)$ en
$$f(\lambda x) = (-\lambda x_2, -\lambda x_1) = \lambda(-x_2, -x_1) = \lambda f(x).$$

Dus f is een lineaire afbeelding.
(b) De matrix A die hoort bij f is de matrix die de vectoren $f\big((1,0)\big)$ en $f\big((0,1)\big)$ als kolommen heeft. $f\big((1,0)\big) = (0,-1)$ en $f\big((0,1)\big) = (-1,0)$. Dus,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) De afbeelding f is injectief dan en slechts dan als $\ker f = \{(0,0)\}$. Stel $f\big((x_1,x_2)\big) = (-x_2, -x_1) = 0$, dan geldt $x_2 = 0$ en $x_1 = 0$, dus $(x_1, x_2) = (0,0)$. Dus $\ker f = \{(0,0)\}$ en daardoor is f injectief.

Voor de surjectiviteit, neem een punt $y = (y_1, y_2)$ in $\mathbb{R}^2$. Voor het punt $x = (-y_2, -y_1)$ geldt dan dat

$$f(x) = \big(-(-y_1), -(-y_2)\big) = (y_1, y_2) = y.$$

Dus f is ook surjectief.
(d) Omdat $g\big((1,0)\big) = (2,0)$ en $g\big((0,1)\big) = (0,1)$, geldt

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(e) De matrix AB is:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 0 & (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

De samenstelling van twee lineaire afbeeldingen is weer een lineaire afbeelding. Definitie 4.16 zegt dat de matrix die hoort bij $f \circ g$ de matrix AB is die hierboven is uitgerekend. De matrix die hoort bij $g \circ f$ is de matrix BA:

$$BA = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) & 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deze matrices zijn niet gelijk. Propositie 4.8 zegt dat iedere lineaire afbeelding een unieke matrix heeft, wat betekent dat $f \circ g \neq g \circ f$.
Alternatief: Voor het laatste deel kunnen we ook alleen kijken naar de afbeeldingen zelf. Neem een willekeurig punt $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Dan geldt

$$(f \circ g)(x_1, x_2) = f\big((2x_1, x_2)\big) = (-x_2, -2x_1).$$

Aan de andere kant geldt

$$(g \circ f)(x_1, x_2) = g\big((-x_2, -x_1)\big) = (-2x_2, -x_1).$$

In het algemeen geldt dus niet dat $f \circ g = g \circ f$.

Vraag 4. Gegeven is de volgende 4×5 matrix A over $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de gereduceerde rij-echelonvorm van A.
(b) Vind een stel vectoren die de nulruimte (kernel) van A opspannen.
(c) Geef drie vectoren die de rijruimte van A opspannen.

Oplossing:
(a) We gebruiken de rijoperaties en het algoritme om de volgende matrices te krijgen:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 11 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De matrix staat nu in echelonvorm. We gaan verder om de matrix in gereduceerde echelonvorm te krijgen.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De gereduceerde echelonvorm van A is de matrix

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Omdat $\ker A = \ker A'$ kijken we naar A' om genererende vectoren voor de nulruimte van A te vinden. Deze bestaat uit de vectoren $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ waarvoor geldt dat $A'x = 0$. Dit geeft de volgende relaties:

$$x_1 - 2x_2 + 3x_5 = 0, \quad x_3 - 2x_5 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Hieruit zien we (en uit het feit dat de tweede en vijfde kolom geen spil bevatten) dat x_2 en x_5 vrije variabelen zijn. Dit geeft dat

$$x = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt dat de vectoren $(2, 1, 0, 0, 0)$ en $(-3, 0, 2, 0, 1)$ de nulruimte van A opspannen, oftewel $\ker A = L\big((2, 1, 0, 0, 0), (-3, 0, 2, 0, 1)\big)$.

(c) Omdat A en A' rijequivalent zijn, geldt $R(A) = R(A')$. Voor A' is duidelijk dat de vectoren $(1, -2, 0, 0, 3)$, $(0, 0, 1, 0, -2)$ en $(0, 0, 0, 1, 0)$ de rijruimte opspannen. Dus

$$R(A) = L\big((1, -2, 0, 0, 3), (0, 0, 1, 0, -2), (0, 0, 0, 1, 0)\big).$$