Lineaire algebra 2: huiswerkset 3
(Secties 5 en 6)
Deadline: 29 oktober 2014, 9:00 uur

(H3.1) Geef de Jordannormaalvorm (inclusief de bijbehorende coördinatentransformatie) van de matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(H3.2) Bereken de matrix e^A voor $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(H3.3) Zij V de reële vectorruimte van functies van $\mathbf{R}$ naar $\mathbf{R}$. En zij $W \subset V$ de deelruimte opgespannen door de functies f_1, f_2, f_3 gegeven door $f_1(x) = \cos(x)$, $f_2(x) = \sin(x)$ en $f_3(x) = \sin(2x)$. Voor $k = 1, 2, 3$, beschouw $\phi_k \in W^*$, gegeven door $\phi_k(f) = f((k-1)\pi/4)$.

1. Bereken de 3×3-matrix $(\phi_i(f_j))_{i,j}$.
2. Leid hieruit af dat f_1, f_2, f_3 een basis is van W en dat ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 een basis is van de duale vectorruimte W^* van W.
3. Laat zien dat er $a, b, c \in \mathbf{R}$ bestaan zó dat alle functies $f \in W$ voldoen aan
$$\int_0^\pi x^2 f(x)dx = af(0) + bf(\pi/4) + cf(\pi/2).$$
Hint: gebruik deel 2.
4. Geef de basis van W waarvan ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 de duale basis is.

(H3.4) Gegeven vectorruimtes V en W en een lineaire afbeelding $f : V \to W$. Zij $f^* : W^* \to V^*$ de duale afbeelding (ook geschreven als f^T). Laat zien: als f^* de nul-afbeelding is, dan is f ook de nul-afbeelding.