Lineaire algebra 2: huiswerkset 4
(Secties 7 en 8)
Deadline: 19 november 2013, 9:00 uur

(H4.1) Zij $V = \mathcal{C}([0,1])$ de reële vectorruimte van reëel-waardige functies op het eenheidsinterval en beschouw de normen $||\cdot||_1$ en $||\cdot||_2$ op V zoals gedefiniëerd in Example 7.7. Definiëer voor $n > 0$:

$$g_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{als } 0 \leq x \leq 1/n, \\ 1/\sqrt{x} & \text{als } 1/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Bewijs $\lim_{n\to\infty} ||g_n||_1 = 2$ en $\lim_{n\to\infty} ||g_n||_2 = \infty$. Leid uit het antwoord af dat de twee normen niet equivalent zijn.

(H4.2) Zij V een *eindigdimensionale* vectorruimte over F, en zij $b : V \times V^* \to F$ een bilineaire afbeelding. Laat zien dat er een endomorfisme f van V bestaat zó dat voor alle $v \in V$ en $\phi \in V^*$ geldt

$$b(v, \phi) = \phi(f(v)).$$

(H4.3) Zij $V = \mathbf{C}^2$ en beschouw de afbeelding $\phi : V \times V \to \mathbf{C}$ gegeven door $\phi((z_1, z_2), (w_1, w_2)) = z_1 w_2 + z_2 w_1$.

1. Is ϕ bilineair? Is ϕ symmetrisch? Is ϕ anti-symmetrisch (skew-symmetric)? Is ϕ alternerend? Is ϕ niet-gedegenereerd? Motiveer je antwoorden.
2. Geef een basis v_1, v_2 van V zó dat geldt

$$\phi(v_i, v_j) = \delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{als } i = j, \\ 0 & \text{als } i \neq j. \end{cases}$$

(H4.4) Zij $V = \mathbf{R}^3$ en beschouw de symmetrische bilineaire vorm $\phi : V \times V \to \mathbf{R}$ die op de standaardbasis gegeven is door de matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Bereken de determinant van de matrix.
2. Is ϕ positief definiet? (Dat wil zeggen, geldt voor elke $v \in V \setminus \{0\}$ dat $\phi(v, v) > 0$? Zie Theorem 8.27 van het dictaat.)
3. Bepaal de rang en de signatuur van ϕ.
4. Beantwoord dezelfde vragen voor de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$