# Tentamen Lineaire Algebra 2

**15 januari, 2016**
**10:00-13:00**

Dit is *geen* openboektentamen. Alleen niet-programmeerbare rekenmachines zijn toegestaan. Bewijs al je antwoorden. In totaal kun je 50 punten halen. Nummer je pagina's. Als je de antwoorden niet op de logische volgorde opschrijft, vermeld dan duidelijk waar welk antwoord staat.

**Opgave 1** (5 punten). Schrijf duidelijk je naam, je emailadres, je universiteit (Delft of Leiden), je studentnummer bij je eigen universiteit en je studentnummer in Leiden op.

**Opgave 2** (10 punten). Beschouw de reëele matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de Jordannormaalvorm van $A$, en een bijbehorende basistransformatie. Met andere woorden, geef een matrix $J$ in Jordannormaalvorm en een inverteerbare matrix $Q$ zodanig dat $J = Q^{-1}AQ$.

(b) Vind een diagonaliseerbare matrix $D$ en een nilpotente matrix $N$ zodanig dat

$$A = D + N \qquad \text{en} \qquad ND = DN.$$

(c) Bepaal (voor elke $t \in \mathbb{R}$)

$$\exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n.$$

**Opgave 3** (8 punten). Zij $B$ een reëele $11 \times 11$ matrix en $I$ de $11 \times 11$ identiteitsmatrix. Gegeven is dat het minimum polynoom van $B$ gelijk is aan

$$M_B(x) = (x-1)^2(x-2)(x+3)^3.$$

Verder geldt er

$$\dim\ker(B - 2I) = 3 \qquad \text{en} \qquad \dim\ker(B + 3I)^3 = 4.$$

(a) Bepaal (met bewijs) alle mogelijke Jordannormaalvormen die $B$ op basis van deze informatie kan hebben. Je hoeft voor elke mogelijke Jordannormaalvorm alleen aan te geven uit welke Jordanblokken die bestaat en hoe vaak elk blok voorkomt; de volgorde van de blokken maakt niet uit.

(b) Bepaal het karakteristiek polynoom van $B$.

**Op de achterkant van dit vel staan nog drie opgaven.**

**Opgave 4** (11 punten). Voor de matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

definiëren we de symmetrische bilineaire afbeelding $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ door $\varphi(x,y) = y^\top M x$. [Hierbij identificeren we zoals gebruikelijk de vectoren $x$ en $y$ met een $3 \times 1$ matrix.]

(a) Laat zien dat $\varphi$ positief definiet is.

We schrijven dit nieuwe inproduct op $\mathbb{R}^3$ als $\langle x, y\rangle_M = \varphi(x,y)$.
Zij $V \subset \mathbb{R}^3$ het vlak opgespannen door $(0,1,0)$ en $(0,0,1)$.

(b) Geef ten opzichte van dit nieuwe inproduct een orthonormale basis voor $V$ en breid die uit tot een orthonormale basis van $\mathbb{R}^3$.

(c) Geef een vector $a \in \mathbb{R}^3$ waarvoor geldt

$$V = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ \langle x, a\rangle_M = 0\}.$$

Zij $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de lineaire afbeelding gegeven door $f\big((r,s,t)\big) = (-r,s,t)$.

(d) Is $f$ zelfgeadjungeerd ten opzichte van dit nieuwe inproduct?
[Engels voor 'zelfgeadjungeerd' is 'self adjoint'.]

(e) Is $f$ normaal ten opzichte van dit nieuwe inproduct?

**Opgave 5** (7 punten). Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bepaal een orthogonale matrix $Q$ en een diagonaalmatrix $D$ zodanig dat

$$D = Q^\top A Q.$$

**Opgave 6** (9 punten). Zij $V$ een eindig-dimensionale reële vectorruimte en $U$ een lineaire deelruimte. Zij $\iota\colon U \to V$ de inclusie-afbeelding. Zij $\varphi\colon V \times V \to \mathbb{R}$ een niet-gedegenereerde symmetrische bilineaire vorm en definieer

$$U^\perp = \{v \in V \ : \ \varphi(u,v) = 0 \text{ voor alle } u \in U\}.$$

(a) Neem (alleen voor dit onderdeel (a)) aan dat voor elke $u \in U$ geldt $\varphi(u,u) = 0$. Bewijs dat er dan geldt $U \subset U^\perp$.

(b) Geef een voorbeeld van $U, V$ en $\varphi$ waarin geldt $U = U^\perp$ en $V \neq \{0\}$ (met bewijs).

(c) Laat zien dat in het algemeen (dus niet alleen in het geval van (b)) de afbeelding $\iota^\top\colon V^* \to U^*$ surjectief is.

(d) Bewijs dat $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$.