Lineaire algebra 2: huiswerkset 3
(Secties 5 en 6)
Deadline: 28 oktober 2015, 9:00 uur

(H3.1) Geef de Jordannormaalvorm (inclusief de bijbehorende coördinatentransformatie) van de matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(H3.2) Bereken de matrix e^A voor $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(H3.3) Zij V de reële vectorruimte van functies van $\mathbf{R}$ naar $\mathbf{R}$. En zij $W \subset V$ de deelruimte opgespannen door de functies f_1, f_2, f_3 gegeven door $f_1(x) = \cos(x)$, $f_2(x) = \sin(x)$ en $f_3(x) = \sin(2x)$. Voor $k = 1, 2, 3$, beschouw $\phi_k \in W^*$, gegeven door $\phi_k(f) = f((k-1)\pi/4)$.
[Je mag voor deze opgave de werkcollegeopgaven gebruiken.]

1. Bereken de 3×3-matrix $(\phi_i(f_j))_{i,j}$.
2. Leid hieruit af dat f_1, f_2, f_3 een basis is van W en dat ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 een basis is van de duale vectorruimte W^* van W.
3. Laat zien dat er $a, b, c \in \mathbf{R}$ bestaan zó dat alle functies $f \in W$ voldoen aan
$$\int_0^\pi x^2 f(x)dx = af(0) + bf(\pi/4) + cf(\pi/2).$$
Hint: gebruik deel 2.
4. Geef de basis van W waarvan ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 de duale basis is.

(H3.4) Voor deze vraag mag je gebruiken dat we voor een lineaire afbeelding $f: V \to W$ al op college hebben laten zien dat $f^\top$ injectief is als f surjectief is, en dat $f^\top$ surjectief is als f injectief is. Je mag de stellingen over annihilatoren, dus 6.18-6.22, **niet** gebruiken.

1. Zij $f: V \to W$ een surjectieve lineaire afbeelding en definieer
$$U = \ker f \subset V.$$
Laat zien dat er voor elke $\phi \in V^*$ met $\phi|_U = 0$ een lineaire afbeelding $\psi \in W^*$ is met
$$\psi(f(v)) = \phi(v)$$
voor alle $v \in V$.
2. Zij f, U, V, W als in (1). Zij $j_U: U \hookrightarrow V$ de inclusie van U in V. Laat zien dat er geldt
$$\operatorname{im} f^\top = \ker j_U^\top.$$
3. Zij $f: V \to W$ en $g: W \to X$ twee lineaire afbeeldingen met $\operatorname{im} f = \ker g$. Bewijs dat er ook geldt $\operatorname{im} g^\top = \ker f^\top$.

   [Hint: schrijf f als de samenstelling van een surjectie $V \to \operatorname{im} f$ en een injectie $\operatorname{im} f \to W$; doe hetzelfde met g.]