Lineaire algebra 2: huiswerkset 3
Deadline: 23 november 2016, 0:01 uur (nacht *voor* het college)
(inleveren per email naar `la2huiswerk@gmail.com`)

(H3.1) Bereken de matrix A^{2016} voor $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(H3.2) Zij V de reële vectorruimte van functies van $\mathbf{R}$ naar $\mathbf{R}$. En zij $W \subset V$ de deelruimte opgespannen door de functies f_1, f_2, f_3 gegeven door $f_1(x) = \cos(x)$, $f_2(x) = \sin(x)$ en $f_3(x) = \sin(2x)$. Voor $k = 1, 2, 3$, beschouw $\phi_k \in W^*$, gegeven door $\phi_k(f) = f((k-1)\pi/4)$.
[Je mag voor deze opgave de werkcollegeopgaven gebruiken.]

1. Bereken de 3×3-matrix $(\phi_i(f_j))_{i,j}$.
2. Leid hieruit af dat f_1, f_2, f_3 een basis is van W en dat ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 een basis is van de duale vectorruimte W^* van W.
3. Laat zien dat er $a, b, c \in \mathbf{R}$ bestaan zó dat alle functies $f \in W$ voldoen aan
$$\int_0^\pi x^2 f(x)dx = af(0) + bf(\pi/4) + cf(\pi/2).$$
Hint: gebruik deel 2.
4. Geef de basis van W waarvan ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 de duale basis is.

(H3.3) Zij $V = \mathcal{C}([0,1])$ de reële vectorruimte van reëel-waardige functies op het eenheidsinterval en beschouw de normen $||\cdot||_1$ en $||\cdot||_2$ op V zoals gedefiniëerd in Example 7.7. Definiëer voor $n > 0$:
$$g_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{als } 0 \leq x \leq 1/n, \\ 1/\sqrt{x} & \text{als } 1/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$
Bewijs $\lim_{n\to\infty} ||g_n||_1 = 2$ en $\lim_{n\to\infty} ||g_n||_2 = \infty$. Leid uit het antwoord af dat de twee normen niet equivalent zijn.

(H3.4) Zij V een *eindigdimensionale* vectorruimte over F, en zij $b : V \times V^* \to F$ een bilineaire afbeelding. Laat zien dat er een endomorfisme f van V bestaat zó dat voor alle $v \in V$ en $\phi \in V^*$ geldt
$$b(v, \phi) = \phi(f(v)).$$