Tentamen lineaire algebra 2
20 april 2017, 14:00 – 17:00
zalen 407-409, B1

Dit is *geen* openboektentamen. Alleen niet-programmeerbare rekenmachines zijn toegestaan. Bewijs je antwoorden. In totaal kun je 50 punten halen. Nummer je pagina's. Als je de antwoorden niet op de logische volgorde opschrijft, vermeld dan duidelijk waar welk antwoord staat.

Hint: Alle karakteristiek polynomen die je nodig zou kunnen hebben, hebben gehele nulpunten. Als dat niet het geval lijkt, dan heb je dus ergens een rekenfout gemaakt.

Opgave 1. (5 punten) Schrijf bovenaan de eerste pagina van je antwoorden je naam, je emailadres, je universiteit (Leiden of Delft) en je Leidse studentnummer.

Opgave 2. (7 punten) Beschouw de reële matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Vind een diagonaliseerbare matrix D en een nilpotente matrix N met $B = D + N$ en $ND = DN$.

(b) Bepaal B^{2017}.

Opgave 3. (9 punten) Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal een orthogonale matrix Q en een diagonaalmatrix D zodanig dat er geldt $A = Q^\top DQ$.

(b) Bepaal de rang en de signatuur van de bilineaire vorm $\varphi\colon \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ gegeven door $(x, y) \mapsto y^\top Ax$.

Opgave 4. (10 punten) Zij V de vectorruimte van reële polynomen van graad hooguit 3 met een inproduct gegeven door

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

(a) Geef een orthonormale basis voor V ten opzichte van dit inproduct.

(b) Is de afbeelding $D\colon V \to V$ gegeven door $D(f) = f'$ zelfgeadjungeerd (ten opzichte van dit inproduct)?
[Zelfgeadjungeerd is 'self adjoint' in het Engels.]

Opgaven 5 en 6 staan op de volgende pagina

Opgave 5. (11 punten) Zij V de vectorruimte van reële polynomen van graad hooguit 5. Zij $T\colon V \to V$ de lineaire afbeelding die $f \in V$ stuurt naar $(x+1) \cdot f''$, waarbij f'' tweede afgeleide van f is.

(a) Laat zien dat voor elk polynoom $f \in V$ van graad $d \geq 2$ geldt dat de graad van $T(f)$ gelijk is aan $d-1$.
(b) Laat zien dat T nilpotent is.
(c) Wat is het minimum polynoom van T?
(d) Geef een matrix in Jordan normaalvorm voor T. Met andere woorden, geef een matrix J in Jordan normaalvorm waarvoor er een basis B voor V bestaat zodanig dat de matrix $[T]_B^B$ geassocieerd aan T ten opzichte van B gelijk is aan J. (Er wordt dus alleen gevraagd om J en niet om B.)

Opgave 6. (8 punten) Gegeven zijn twee reële vectorruimtes V en W en een bilineaire vorm $\varphi\colon V \times W \to \mathbf{R}$. Zoals we hebben gezien in het dictaat en op college induceert φ twee lineaire afbeeldingen

$$\varphi_L \colon V \to W^* \qquad \text{en} \qquad \varphi_R \colon W \to V^*.$$

Op college en in het dictaat wordt ook de afbeelding $\alpha_W \colon W \to W^{**}$ gedefinieerd.

(a) Laat zien dat er geldt

$$\varphi_R = \varphi_L^\top \circ \alpha_W.$$

(b) Neem aan dat W eindig-dimensionaal is. Bewijs dat φ niet-gedegenereerd is dan en slechts dan als φ_L of φ_R een isomorfisme is.