Tentamen lineaire algebra 2
18 januari 2019, 10:00 – 13:00
zalen Huygens 204 en 211/214

Dit is *geen* openboektentamen. Alleen niet-programmeerbare rekenmachines die geen matrices kunnen vermenigvuldigen zijn toegestaan. Bewijs je antwoorden. In totaal kun je 45 punten halen. Nummer je pagina's. Als je de antwoorden niet op de logische volgorde opschrijft, vermeld dan duidelijk waar welk antwoord staat.

Opgave 1. (8 punten) Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal een diagonaliseerbare matrix D en een nilpotente matrix N zodanig dat $A = N + D$ en $ND = DN$.

(b) Bepaal A^{2019}.

Opgave 2. (12 punten) Gegeven is de matrix

$$M = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Laat zien dat M rang 2 heeft.

(b) Laat zien dat $\lambda = -6$ een eigenwaarde is voor M.

(c) Bepaal een orthogonale matrix Q en een diagonale matrix D zodanig dat er geldt $M = QDQ^\top$.

Opgave 3. (9 punten) Zij V een reële vectorruimte van dimensie 8. Zij $g\colon V \to V$ een lineaire afbeelding. Stel dat we de volgende rangen kennen.

$$\operatorname{rang}\left((g - 3\,\mathrm{id}_V)^8\right) = 6 \qquad \text{en} \qquad \operatorname{rang}\left((g + 2\,\mathrm{id}_V)^8\right) = 3.$$

(a) Bepaal twee eigenwaarden voor g, en ook de dimensies van de bijbehorende gegeneraliseerde eigenruimtes.

(b) Laat zien dat g een Jordannormaalvorm heeft. Dat wil zeggen, er bestaat een basis B voor V zodanig dat de matrix $[g]_B^B$ een Jordannormaalvorm is.

Opgave 4 staat op de volgende pagina

Opgave 4. (16 punten) Voor elk positief geheel getal n schrijven we V_n voor de reële vectorruimte van reële polynomen van graad kleiner dan n. Er geldt dus $\dim V_n = n$. Definieer de afbeelding $\varphi\colon V_n \times V_n \to \mathbf{R}$ door

$$\varphi(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

(a) Laat zien dat φ een inproduct is op V_n.

(b) Verifieer dat voor elke gehele i, j met $0 \le i, j < n$ geldt

$$\varphi(x^i, x^j) = \frac{1}{i+j+1}.$$

(c) Neem $n = 4$. Zij $U \subset V_4$ de deelruimte van alle polynomen f met $f(0) = 0$. Geef een orthogonale basis voor U.

(d) Neem $n = 2$. Zij $T\colon V_2 \to V_2$ het endomorfisme dat een polynoom $f \in V_2$ stuurt naar zijn afgeleide f'. Is T normaal?

(e) Bewijs dat de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

inverteerbaar is.