Tentamen lineaire algebra 2
18 januari 2019, 10:00 – 13:00
Uitwerkingen (schets)

Opgave 1. $(5+3$ punten) Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal een diagonaliseerbare matrix D en een nilpotente matrix N zodanig dat $A = N + D$ en $ND = DN$.

(b) Bepaal A^{2019}.

Uitwerking.

(a) Het karakteristiek polynoom van A is $(t-3)^2$, dus de enige eigenwaarde is 3. Omdat het karakteristiek polynoom ontbindt in lineaire factoren, heeft A een Jordannormaalvorm J, waarin elk diagonaalelement gelijk is aan 3. Er geldt dus $J = D' + N'$ met

$$D' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad N' = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

voor zekere $x \in \{0, 1\}$. Voor deze matrices geldt $D'N' = N'D'$. Er is dus een inverteerbare matrix Q zodanig dat $Q^{-1}AQ = J = D' + N'$. Dan geldt $A = QJQ^{-1} = D + N$ met $D = QD'Q^{-1}$ en $N = QN'Q^{-1}$. We hoeven Q niet te bepalen: omdat D' een scalar veelvoud is van de identiteit, geldt $D = QD'Q^{-1} = D'$ en

$$N = A - D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Er geldt bovendien

$$DN = (QD'Q^{-1})(QN'Q^{-1}) = QD'N'Q^{-1} = QN'D'Q^{-1} = (QN'Q^{-1})(QD'Q^{-1}) = ND,$$

maar dat volgt nog makkelijker uit het feit dat D een scalaire matrix is.

(b) Omdat D en N commuteren mogen we het binomium van Newton toepassen. Wegens $N^2 = 0$ vallen bijna alle termen daarin weg en vinden we voor $k \geq 2$ dat

$$A^k = (D+N)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^{k-j} N^j = D^k + kD^{k-1}N.$$

Met $D = 3I_2$ volgt

$$A^k = D^{k-1}(D + kN) = 3^{k-1}(D + kN).$$

Voor $k = 2019$ vinden we

$$A^{2019} = 3^{2018} \cdot (D + 2019N) = 3^{2018} \cdot \begin{pmatrix} -2016 & 2019 \\ -2019 & 2022 \end{pmatrix}.$$

Opgave 2. $(3+3+6$ punten) Gegeven is de matrix
$$M = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Laat zien dat M rang 2 heeft.
(b) Laat zien dat $\lambda = -6$ een eigenwaarde is voor M.
(c) Bepaal een orthogonale matrix Q en een diagonale matrix D zodanig dat er geldt $M = QDQ^\top$.

Uitwerking.
(a) Dit kan eenvoudig door de matrix te vegen. Het volgt ook uit het feit dat de rang enerzijds minstens 2 is omdat de eerste twee kolommen geen veelvoud van elkaar zijn, terwijl de rang ook hooguit 2 is omdat de kern de niet-nul vector $(1,2,1)$ bevat.
(b) De matrix
$$M - \lambda I_3 = M + 6\, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
heeft rang 1 (alle rijen zijn een veelvoud van de eerste rij), en dus een niet-triviale kern. Deze kern is de eigenruimte, dus $\lambda = -6$ is inderdaad een eigenwaarde.
(c) We laten eerst zien dat 0 en -6 de enige eigenwaarden zijn. De eigenruimte bij eigenwaarde 0 heeft dimensie 1 wegens (a), en de eigenruimte bij eigenwaarde -6 heeft dimensie 2 wegens (b). De som van de dimensies van alle eigenruimtes is hooguit 3 (het aantal rijen/kolommen), dus we concluderen dat er niet nog meer eigenwaarden zijn dan alleen 0 en -6. Een andere (meer omslachtige) manier om dit te laten zien is uit te rekenen dat het karakteristiek polynoom van M gelijk is aan $t(t+6)^2$. Nog een derde manier is door te checken dat $M(M+6I_3) = 0$, dus het minimum polynoom van M is een deler van (en zelfs gelijk aan) $t(t+6)$. Omdat alle nulpunten van het karakteristiek polynoom (dus de eigenwaarden) ook nulpunten van het minimum polynoom zijn, volgt dat 0 en -6 de enige eigenwaarden zijn.

Omdat M symmetrisch is, is M ook diagonaliseerbaar (dit volgt ook uit het feit dat het minimum polynoom geen dubbele nulpunten heeft), en zelfs orthogonaal diagonaliseerbaar. We zoeken een orthonormale basis. Eigenvectoren van verschillende eigenwaarden zijn automatisch orthogonaal, dus het volstaat om voor beide eigenruimtes een orthonormale basis te vinden. Voor eigenwaarde 0 is de eigenruimte 1-dimensionaal, dus hoeven we alleen de voortbrenger $(1,2,1)$ te normaliseren. Dit geeft $v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$. Voor eigenwaarde -6 wordt de eigenruimte $\ker(M+6I_3)$ voortgebracht door $(-1,0,1)$ en $(-2,1,0)$. Passen we op deze vectoren Gram-Schmidt toe, dan vinden we $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$ en $v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)$. Met de basis $B = (v_1, v_2, v_3)$ en
$$Q = [\mathrm{id}]_E^B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad D = [f_M]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$
vinden we
$$M = [f_M]_E^E = [\mathrm{id}]_E^B \cdot [f_M]_B^B \cdot [\mathrm{id}]_B^E = QDQ^{-1}.$$
En omdat B orthonormaal is, volgt $Q^{-1} = Q^\top$.

Opgave 3. (5 + 4 punten) Zij V een reële vectorruimte van dimensie 8. Zij $g\colon V \to V$ een lineaire afbeelding. Stel dat we de volgende rangen kennen.

$$\operatorname{rang}\big((g - 3\,\mathrm{id}_V)^8\big) = 6 \qquad \text{en} \qquad \operatorname{rang}\big((g + 2\,\mathrm{id}_V)^8\big) = 3.$$

(a) Bepaal twee eigenwaarden voor g, en ook de dimensies van de bijbehorende gegeneraliseerde eigenruimtes.
(b) Laat zien dat g een Jordannormaalvorm heeft. Dat wil zeggen, er bestaat een basis B voor V zodanig dat de matrix $[g]_B^B$ een Jordannormaalvorm is.

Uitwerking. Deze opgave is iets subtieler dan het op het eerste gezicht lijkt. Veel van de stellingen die je zou willen toepassen hebben namelijk als voorwaarde dat het karakteristiek polynoom ontbindt in lineaire factoren. Dat weten we (nog) niet, dus die stellingen kunnen we nog niet gebruiken! Voor (a) geven we twee oplossingen.
(a). Om te beginnen is 3 een eigenwaarde, want als de kern van $g - 3\mathrm{id}_V$ triviaal was, dan zou $g - 3\mathrm{id}_V$ een isomorfisme zijn, en dan elke macht ervan ook, wat in tegenspraak is met het feit dat de rang van $(g - 3\mathrm{id}_V)^8$ niet maximaal is. Zij $k \geq 8$ een geheel getal en definieer $U = \ker\big((g - 3\mathrm{id}_V)^k\big) \subset V$. Definieer ook $n = \dim U \leq 8$. Definieer bovendien de beperking $h = (g - 3\mathrm{id}_V)|_U$ tot U. Dan geldt $h^k = 0$, dus is h nilpotent (op U), dus is het karakteristiek polynoom van h gelijk aan t^n, dus geldt $h^n = 0$ wegens Cayley-Hamilton, en dus ook $h^8 = 0$. Hieruit volgt dat de inclusie $\ker(g - 3\mathrm{id}_V)^8 \subset U$ een gelijkheid is, dus $\ker(g - 3\mathrm{id}_V)^8$ is de hele gegeneraliseerde eigenruimte voor eigenwaarde 3, dus die heeft dimensie $8 - 6 = 2$. Het argument voor eigenwaarde -2 is analoog.

Een alternatief argument gaat als volgt. Voor alle $j \in \{0, 1, 2, \ldots, 8\}$ definiëren we $r_j = \dim\ker(g - 3\mathrm{id}_V)^j$. Uit de dimensiestelling voor lineaire afbeeldingen volgt $r_8 = \dim V - 6 = 2$. De rij

$$\{0\} = \ker \mathrm{id}_V = \ker(g-3\mathrm{id}_V)^0 \subset \ker(g-3\mathrm{id}_V)^1 \subset \ker(g-3\mathrm{id}_V)^2 \subset \ker(g-3\mathrm{id}_V)^3 \subset \ldots$$

geeft $0 = r_0 \leq r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \ldots$. Definiëren we $s_j = r_j - r_{j-1} \geq 0$ voor $j \geq 1$, dan volgt uit Lemma 4.5 dat er geldt $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq \ldots$. Uit $2 = r_8 = s_1 + s_2 + \cdots + s_8$ volgt dan ten eerste dat $s_1 \neq 0$, dus $r_1 \neq 0$, dus de kern van $g - 3\mathrm{id}_V$ is niet nul, dus 3 is een eigenwaarde. Uit de som $2 = r_8 = s_1 + s_2 + \cdots + s_8$ volgt bovendien ook dat er een $j \leq 8$ is met $s_j = 0$ en dus $0 = s_j = s_{j+1} = s_{j+2} = \ldots$. Hieruit volgt $r_{j-1} = r_j = r_{j+1} = \ldots$. (Vergelijk dit met opgave 5 van hoofdstuk 4 uit het dictaat.) In het bijzonder is $\ker(g - 3\mathrm{id}_V)^k$ gelijk aan $\ker(g - 3\mathrm{id}_V)^8$ voor $k \geq 8$, dus $\ker(g - 3\mathrm{id}_V)^8$ is de hele gegeneraliseerde eigenruimte, dus de gegeneraliseerde eigenruimte voor eigenwaarde 3 heeft dimensie 2. Analoog vinden we dat -2 een eigenwaarde is, en de dimensie van de bijbehorende gegeneraliseerde eigenruimte is $8 - 3 = 5$.
(b). Zij $U = \ker\big((g - 3\mathrm{id}_V)^8\big) \subset V$ als in onderdeel (a), dus de gegeneraliseerde eigenruimte voor eigenwaarde 3, met dimensie $n = \dim U = 2$. Dan is de beperking h van $g - 3\mathrm{id}_V$ tot U nilpotent, dus h heeft karakteristiek polynoom $t^{\dim U} = t^2$, en de beperking $g|_U$ heeft dus karakteristiek polynoom $(t - 3)^2$. Dit betekent dat $(t - 3)^2$ een deler is van het karakteristiek polynoom P_g van g (zie bijvoorbeeld opgave 11.2.7 uit het dictaat van Lineaire Algebra 1). Analoog is $(t + 2)^5$ ook een deler van P_g, dus is er een polynoom $q(t)$ zodanig dat $P_g(t) = (t - 3)^2(t + 2)^5 q(t)$. Hieruit volgt dat $q(t)$ graad 1 heeft, dus $P_g(t)$ is het product van lineaire factoren, dus g heeft een Jordannormaalvorm.

Opgave 4. ($3+1+4+4+4$ punten) Voor elk positief geheel getal n schrijven we V_n voor de reële vectorruimte van reële polynomen van graad kleiner dan n. Er geldt dus $\dim V_n = n$. Definieer de afbeelding $\varphi\colon V_n \times V_n \to \mathbf{R}$ door

$$\varphi(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

(a) Laat zien dat φ een inproduct is op V_n.
(b) Verifieer dat voor elke gehele i,j met $0 \le i,j < n$ geldt

$$\varphi(x^i,x^j) = \frac{1}{i+j+1}.$$

(c) Neem $n=4$. Zij $U \subset V_4$ de deelruimte van alle polynomen f met $f(0)=0$. Geef een orthogonale basis voor U.
(d) Neem $n=2$. Zij $T\colon V_2 \to V_2$ het endomorfisme dat een polynoom $f \in V_2$ stuurt naar zijn afgeleide f'. Is T normaal?
(e) Bewijs dat de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac12 & \frac13 & \frac14 & \frac15 \\ \frac12 & \frac13 & \frac14 & \frac15 & \frac16 \\ \frac13 & \frac14 & \frac15 & \frac16 & \frac17 \\ \frac14 & \frac15 & \frac16 & \frac17 & \frac18 \\ \frac15 & \frac16 & \frac17 & \frac18 & \frac19 \end{pmatrix}$$

inverteerbaar is.

Uitwerking.

(a) Er geldt uiteraard $\varphi(f,g) = \varphi(g,f)$, dus φ is symmetrisch. Dat φ bilineair is volgt dan uit de identiteit

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g) &= \int_0^1 \big(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\big)g(x)\,dx = \int_0^1 \big(\lambda_1 f_1(x)g(x) + \lambda_2 f_2(x)g(x)\big)\,dx \\ &= \int_0^1 \lambda_1 f_1(x)g(x)\,dx + \int_0^1 \lambda_2 f_2(x)g(x)\,dx = \lambda_1\varphi(f_1,g) + \lambda_2\varphi(f_2,g).\end{aligned}$$

Het feit dat φ positief-definiet is volgt omdat $f(x)^2$ nergens negatief is, en de integraal over het interval $[0,1]$ dus positief is, tenzij $f(x)=0$ voor alle $x \in [0,1]$. Dat laatste kan alleen als $f=0$, want een niet-nul polynoom heeft slechts eindig veel nulpunten.

(b) Duidelijk, want $\int_0^1 x^m\,dx = \frac{1}{m+1}$ voor $m = i+j \ge 0$.

(c) We beginnen met de basis (x, x^2, x^3) en passen Gram-Schmidt toe, zonder normaliseren, want we hoeven alleen maar een orthogonale basis. We krijgen uiteindelijk

$$v_1 = x, \qquad v_2 = x^2 - \tfrac34 x, \qquad v_3 = x^3 - \tfrac43 x^2 + \tfrac25 x.$$

(d) Om te kijken of T normaal is, bepalen we de geassocieerde matrix ten opzichte van een orthonormale basis. Als basis nemen we de basis die we krijgen door Gram-Schmidt toe te passen op de basis $(1,x)$, namelijk de basis $B = (1, c(x-\frac12))$, waarbij $c \in \mathbf{R}$ een constante is zodanig dat $c(x-\frac12)$

lengte 1 heeft. (We kunnen checken dat $c = \pm 2\sqrt{3}$, maar dat hebben we niet nodig.) Ten opzichte van die basis vinden we

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Noemen we deze matrix A, dan geldt

$$AA^\top = \begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = A^\top A,$$

dus A is niet normaal, dus T is niet normaal.

(e) De bilineaire vorm φ is positief definiet, dus ook niet-gedegenereerd. Dat betekent dat als B een basis voor V_n is, dat φ dan ten opzichte van B gerepresenteerd wordt door een matrix die inverteerbaar is. Voor $n = 5$ en de basis $B = (1, x, x^2, x^3, x^4)$ is die matrix precies de matrix uit de opgave, dus is die matrix inverteerbaar. Zie ook Remark 8.32 uit het dictaat.