

**Lineaire algebra 2: huiswerkset 2 (Chapter 4–5)**  
**Deadline: 22 oktober 2019, 23:59 uur (nacht voor het college)**  
(inleveren per email naar [la2huiswerk@gmail.com](mailto:la2huiswerk@gmail.com))

**(H2.1)**

1. Geef een voorbeeld van een positief geheel getal  $n$  en twee nilpotente  $(n \times n)$ -matrices  $A$  en  $B$  waarvoor het product  $AB$  *niet* nilpotent is.
2. Gegeven twee nilpotente  $(n \times n)$ -matrices  $A$  en  $B$  die commuteren (dat wil zeggen,  $AB = BA$ ), laat zien dat  $AB$  nilpotent is.
3. Bestaat er een positief geheel getal  $n$  en een tweetal nilpotente  $(n \times n)$ -matrices  $A$  en  $B$  waarvoor  $AB$  inverteerbaar is? (bewijs je antwoord)

**(H2.2)** Zij  $f$  een nilpotent endomorfisme van een 3-dimensionale  $\mathbf{R}$ -vectorruimte  $V$ . Laat zien dat  $V$  oneindig veel  $f$ -invariante deelruimtes bevat dan en slechts dan als geldt  $f^2 = 0$ .

**(H2.3)** Beschouw de reële matrices

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Schrijf  $C$  in blokdiagonaalvorm met blokken van grootte  $\leq 2$ . Dat wil zeggen, geef matrices  $A, Q \in \text{Mat}(4, \mathbf{R})$  met  $Q$  inverteerbaar zó dat geldt  $C = QAQ^{-1}$ , waarbij  $A$  van de vorm

$$A = \left( \begin{array}{c|c|c|c} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & B_\ell \end{array} \right)$$

is voor  $(n_i \times n_i)$ -matrices  $B_i$  met  $n_i \leq 2$ .

Hint:  $x^4 - 1 = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$ .

2. Schrijf de (nilpotente) matrix  $D$  in de standaardvorm voor nilpotente matrices. Dat wil zeggen, geef een inverteerbare matrix  $Q$  en een matrix  $A$  van de vorm in Remark 4.9 zó dat geldt  $D = QAQ^{-1}$ .

**(H2.4)** Geef de Jordannormaalvorm (inclusief de bijbehorende coördinatentransformatie) van de matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$