Lineaire algebra 2: huiswerkset 4
Deadline: 10 december 2019, 23:59 uur (nacht *voor* het college)
(inleveren per email naar `la2huiswerk@gmail.com`)

(H4.1) Zij V een *eindigdimensionale* vectorruimte over F, en zij $b : V \times V^* \to F$ een bilineaire afbeelding. Laat zien dat er een endomorfisme f van V bestaat zó dat voor alle $v \in V$ en $\phi \in V^*$ geldt

$$b(v, \phi) = \phi(f(v)).$$

(H4.2) Zij $V = \mathbf{C}^2$ en beschouw de afbeelding $\phi : V \times V \to \mathbf{C}$ gegeven door $\phi((z_1, z_2), (w_1, w_2)) = z_1 w_2 + z_2 w_1$.

1. Is ϕ bilineair? Is ϕ symmetrisch? Is ϕ anti-symmetrisch (skew-symmetric)? Is ϕ alternerend? Is ϕ niet-gedegenereerd? Motiveer je antwoorden.
2. Geef een basis v_1, v_2 van V zó dat geldt

$$\phi(v_i, v_j) = \delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{als } i = j, \\ 0 & \text{als } i \neq j. \end{cases}$$

(H4.3) Zij $V = \mathbf{R}^3$ en beschouw de symmetrische bilineaire vorm $\phi : V \times V \to \mathbf{R}$ die op de standaardbasis gegeven is door de matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Bereken de determinant van de matrix.
2. Is ϕ positief definiet?
3. Bepaal de rang en de signatuur van ϕ.
4. Beantwoord dezelfde vragen voor de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(H4.4) Beschouw $\mathbf{C}^3$ met het Hermitese standaardinprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, en zij $v \in \mathbf{C}^3$ en vector met $\langle v, v \rangle = 1$. Definiëer de lineaire afbeelding $f : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ door $f(x) = x - i\langle x, v \rangle v$.

1. Laat zien dat de geadjungeerde (Engels: *adjoint*) van f gegeven is door $f^*(x) = x + i\langle x, v \rangle v$.
2. Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van f.
3. Laat zien dat f normaal is.
4. Is f een isometrie?