Tentamen lineaire algebra 2
17 januari 2020, 10:15 – 13:15

Opgave 1.
Beschouw de matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ -2 & -3 & 5 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Om rekenwerk te besparen geven we dat er geldt $AP = PJ$ en

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Geef een diagonaliseerbare matrix D en een nilpotente matrix N zodanig dat $ND = DN$ en $D + N = A$.
(b) Verifieer dat er geldt $D^2 = -2D$.
(c) Bewijs dat voor elk geheel getal $t \geq 2$ geldt

$$A^t = (-2)^{t-2} D(tN - 2I_3).$$

Oplossing. Merk op dat J al een Jordan normaalvorm is, en er geldt $A = PJP^{-1}$, dus J is een Jordan normaalvorm van A. Je hoeft A dus niet meer in Jordan normaalvorm te brengen!

(a) Definieer

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dan is d diagonaal, en n nilpotent, want n^2 is de nulmatrix. Verder geldt

$$dn = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = nd.$$

Voor $N = PnP^{-1}$ en $D = PdP^{-1}$ geldt dan

$$N + D = PnP^{-1} + PdP^{-1} = P(n + d)P^{-1} = PJP^{-1} = A$$

en

$$DN = (PdP^{-1})(PnP^{-1}) = PdnP^{-1} = PndP^{-1} = (PnP^{-1})(PdP^{-1}) = ND.$$

Verder is D per definitie diagonaliseerbaar omdat d diagonaal is. En tenslotte is N is nilpotent, want n^2 is de nulmatrix, dus $N^2 = (PnP^{-1})(PnP^{-1}) = Pn^2P^{-1}$ ook.

Om D en N expliciet te geven, berekenen we

$$N = PnP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

en

$$D = A - N = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 6 \\ -2 & -4 & 6 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(Uiteraard is het goed om dit te testen met $D = PdP^{-1}$).

(a') Definieer n en d als hierboven en daarna

$$N = PnP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

en

$$D = PdP^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 6 \\ -2 & -4 & 6 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Verifieer daarna door puur rekenwerk of slimmere redeneringen zoals hierboven dat $A = D + N$ en N is nilpotent en $ND = DN$ en D is diagonaliseerbaar.

(b) Voor d als in (a) geldt

$$d^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = -2d.$$

Omdat de scalairen (of scalaire matrices) commuteren met alle matrices, volgt dus

$$D^2 = Pd^2P^{-1} = P(-2d)P^{-1} = -2PdP^{-1} = -2D.$$

(b') Met meer rekenwerk kun je ook direct checken dat $D^2 = -2D$.

(c) Omdat N en D commuteren, mogen we het binomium van Newton toepassen. Omdat $N^2 = 0$ volgt

$$A^t = (N + D)^t = \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} N^k D^{n-k} = \sum_{k=0}^{1} \binom{t}{k} N^k D^{t-k} = D^t + tD^{t-1}N$$

voor alle $t \geq 1$. Voor $t \geq 1$ volgt uit (b) ook dat $D^t = (-2)^{t-1}D$, dus voor $t \geq 2$ geldt bovendien $D^{t-1} = (-2)^{t-2}D$, en dus

$$A^t = D^t + tD^{t-1}N = (-2)^{t-1}D + (-2)^{t-2}tDN = (-2)^{t-2}D(N - 2I_3).$$

(c') Je kunt dit ook met inductie doen.

Opgave 2.

Beschouw de matrix

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal een matrix Q zodanig dat $Q^\top NQ$ diagonaal is.
[Merk op dat Q niet orthogonaal hoeft te zijn.]

(b) Wat is de signatuur van N?

Oplossing.

(a) Merk op dat er (expliciet) niet gevraagd wordt om een orthogonale matrix Q, dus we hoeven de theorie van hoofdstuk 10 niet toe te passen, en de theorie van hoofdstuk 8 volstaat. Zie voor gedetailleerde uitleg de voorbeelden uit het dictaat. Met

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vinden we

$$N' = Q_1^\top N Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Met

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vinden we vervolgens

$$N'' = Q_2^\top N' Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Voor

$$Q = Q_1 Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

geldt dus

$$N'' = Q_2^\top N' Q_2 = Q_2^\top Q_1^\top N Q_1 Q_2 = Q^\top N Q.$$

Omdat N'' diagonaal is, voldoet deze Q.

(a') [Alternatief voor (a)] Omdat in het begin, ten opzichte van de bilineaire afbeelding gegeven door N, de standaard basisvectoren e_2 en e_3 al loodrecht op elkaar staan en inproduct 1 met zichzelf hebben, kunnen we het iets makkelijker maken door de volgorde van de basisvectoren om te draaien. Met

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vinden we

$$N' = Q_1^\top N Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vervolgens vinden we met

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dat

$$N'' = Q_2^\top N' Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

Voor

$$Q = Q_1 Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

geldt dus

$$N'' = Q_2^\top N' Q_2 = Q_2^\top Q_1 \top N Q_1 Q_2 = Q^\top N Q.$$

Omdat N'' diagonaal is, voldoet deze Q.

(a") [Tweede alternatief voor (a)] We hoeven niet per se met de eerste basisvector te vegen. Omdat, zoals gezegd, in het begin, ten opzichte van de bilineaire afbeelding gegeven door N, de standaard basisvectoren e_2 en e_3 al loodrecht op elkaar staan, hoeven we alleen de eerste vector aan te passen. De basis $B = (e_1 - 2e_2 - 3e_3, e_2, e_3)$ is orthogonaal ten opzichte van de bilineaire vorm gegeven door N. Dat betekent dat we in één keer, voor

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vinden dat

$$Q^\top N Q = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

diagonaal is. Dus deze Q voldoet ook.

(b) In elk van de drie alternatieven voor (a) vinden we een diagonaalmatrix met twee positieve waarden langs de diagonaal, en één negatieve. De signatuur is dus $2 - 1 = 1$.

Opgave 3.

Zij A een symmetrische reële matrix met karakteristiek polynoom

$$P_A(t) = (t^3 - t)(t^3 - t^2).$$

(a) Hoeveel rijen en kolommen heeft A?
(b) Wat zijn de eigenwaarden van A?
(c) Bewijs dat het minimum polynoom van A door de gegeven informatie uniek bepaald is en bepaal dat minimum polynoom.
(d) Laat zien dat er geldt $A^3 = A$.

Oplossing.

(a) De graad van het karakteristiek polynoom is gelijk aan het aantal rijen en kolommen, dus dat is 6.

(b) Het karakteristiek polynoom factoriseert als

$$P_A(t) = t^3(t-1)^2(t+1)$$

dus de nulpunten zijn 0, 1 en -1. Dat zijn dus de eigenwaarden.

(c) Omdat A reëel en symmetrisch is, is A diagonaliseerbaar (hoofdstuk 10), dus het minimum polynoom van A is het product van verschillende lineaire factoren. Het minimum polynoom is een deler van het karakteristiek polynoom, en elke lineaire factor van het karakteristiek polynoom is ook een factor van het minimum polynoom, dus we vinden dat het minimum polynoom gelijk is aan

$$M_A(t) = t(t-1)(t+1) = t^3 - t.$$

(d) Het minimum polynoom verdwijnt per definitie bij het substitueren van A, dat wil zeggen $0 = M_A(A) = A^3 - A$. Er geldt dus $A^3 = A$.

Opgave 4.
Zij $f\colon V \to V$ een endomorfisme van een eindig-dimensionale inproductruimte V. Zij $U \subset V$ een deelruimte zodanig dat voor elke $u \in U$ en elke $v \in V$ de vector $f^*(v)$ loodrecht staat op u. Laat zien dat U bevat is in de kern van f.

Oplossing. Voor elke $u \in U$ geldt blijkbaar voor elke v dat

$$\langle f(u), v\rangle = \langle u, f^*(v)\rangle = 0,$$

dus $f(u)$ staat loodrecht op alle v, dus de lineaire vorm $\langle f(u), \_\rangle$ op V is de nulafbeelding op V. Omdat het inproduct niet-gedegenereerd is, volgt $f(u) = 0$, dus $u \in \ker f$. Dit geldt voor alle $u \in U$, dus we vinden $U \subset \ker f$.

Eerste alternatieve oplossing. Zijn $u \in U$ en neem $v = f(u)$. Dan geldt

$$\langle f(u), f(u)\rangle = \langle f(u), v\rangle = \langle u, f^*(v)\rangle = 0.$$

Omdat het inproduct positief definiet is, volgt $f(u) = 0$ en $u \in \ker f$. Dit geldt voor alle $u \in U$, dus we vinden $U \subset \ker f$.

Tweede alternatieve oplossing. Een van de bewezen stellingen geeft

$$\operatorname{im} f^* = (\ker f)^\perp,$$

en omdat het inproduct niet-gedegenereerd is, volgt

$$(\operatorname{im} f^*)^\perp = ((\ker f)^\perp)^\perp = \ker f.$$

Uit het gegeven volgt direct dat $U \subset (\operatorname{im} f^*)^\perp$, dus we krijgen ook $U \subset \ker f$.

Opgave 5. Stel V en W zijn twee eindig-dimensionale reële vectorruimtes. Definiëer een isomorfisme

$$\operatorname{Hom}(V, W^*) \to \operatorname{Hom}(W, V^*)$$

en bewijs ook dat je afbeelding daadwerkelijk een isomorfisme is.

Oplossing. De afbeelding $\beta\colon \operatorname{Bil}(V, W) \to \operatorname{Hom}(V, W^*)$ die ϕ stuurt naar ϕ_L is een isomorfisme volgens Theorem 8.9 uit het boek. Net zo is de afbeelding $\delta\colon \operatorname{Bil}(V, W) \to \operatorname{Hom}(W, V^*)$ die ϕ stuurt naar ϕ_R een isomorfisme. De samenstelling $\delta \circ \beta^{-1}$ is dan een isomorfisme van $\operatorname{Hom}(V, W^*)$ naar $\operatorname{Hom}(W, V^*)$.

Eerste alternatieve oplossing.

We claimen dat er een afbeelding $\sigma\colon \mathrm{Hom}(V, W^*) \to \mathrm{Hom}(W, V^*)$ bestaat die een lineaire afbeelding $f\colon V \to W^*$ stuurt naar een afbeelding $g\colon W \to V^*$ waarvoor voor alle $v \in V$ en $w \in W$ geldt $(g(w))(v) = (f(v))(w)$.

Zij $f \in \mathrm{Hom}(V, W^*)$ een willekeurig element. We merken eerst op dat voor elke $w \in W$, de afbeelding $(f(\_))(w)\colon V \to \mathbf{R}$ die $v \in V$ stuurt naar $(f(v))(w)$ lineair is. Inderdaad, voor $v_1, v_2 \in V$ geldt er $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$, dus

$$(f(v_1 + v_2))(w) = (f(v_1) + f(v_2))(w) = (f(v_1))(w) + (f(v_2))(w).$$

Men ziet net zo in dat $(f(\_))(w)$ ook de scalaire vermenigvuldiging respecteert, dus $(f(\_))(w)$ is inderdaad een lineaire vorm op V.

[Een andere manier om snel in te zien dat $(f(\_))(w)$ lineair is, is dat het gelijk is aan de samenstelling $\mathrm{ev}_w \circ f$ van twee lineaire afbeeldingen.]

Dit betekent er een goed gedefinieerde afbeelding $g\colon W \to V^*$ is die w stuurt naar $(f(\_))(w) = \mathrm{ev}_w \circ f$, dat wil zeggen, voor elke $v \in V$ en $w \in W$ geldt $(g(w))(v) = (f(v))(w)$. Om te zien dat deze g lineair is checken we voor $w_1, w_2 \in W$ dat voor elke $v \in V$ wegens lineariteit van $f(v)$ geldt

$$\begin{aligned}(g(w_1 + w_2))(v) = (f(v))(w_1 + w_2) &= f(v)(w_1) + f(v)(w_2)\\ &= (g(w_1))(v) + (g(w_2))(v) = (g(w_1) + g(w_2))(v).\end{aligned}$$

Hieruit volgt $g(w_1 + w_2) = g(w_1) + g(w_2)$. Men ziet net zo in dat g ook de scalaire vermenigvuldiging respecteert, dus g is inderdaad lineair, en dus bevat in $\mathrm{Hom}(W, V^*)$.

Daarmee is onze eerste claim bewezen, namelijk het bestaan van σ. We claimen dat σ bovendien lineair is. Inderdaad, voor $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(V, W^*)$ geldt voor alle $v \in V$ en $w \in W$ dat

$$\begin{aligned}\big((\sigma(f_1 + f_2))(w)\big)(v) &= ((f_1 + f_2)(v))(w) = (f_1(v) + f_2(v))(w)\\ &= f_1(v)(w) + f_2(v)(w) = (\sigma(f_1))(w)(v) + (\sigma(f_2))(w)(v)\\ &= \big((\sigma(f_1))(w) + (\sigma(f_2))(w)\big)(v) = \big((\sigma(f_1) + \sigma(f_2))(w)\big)(v).\end{aligned}$$

Dit impliceert $(\sigma(f_1 + f_2))(w) = (\sigma(f_1) + \sigma(f_2))(w)$ voor alle $w \in W$, en dus $\sigma(f_1 + f_2) = \sigma(f_1) + \sigma(f_2)$. Men ziet net zo in dat σ ook de scalaire vermenigvuldiging respecteert, dus σ is inderdaad lineair.

Analoog definiëren we een lineaire afbeelding $\tau\colon \mathrm{Hom}(W, V^*) \to \mathrm{Hom}(V, W^*)$ die een lineaire afbeelding $g\colon W \to V^*$ stuurt naar de afbeelding $h\colon V \to W^*$ waarvoor voor alle $v \in V$ en $w \in W$ geldt $(h(v))(w) = (g(w))(v)$.

We laten nu eenvoudig zien dat de samenstelling $\tau \circ \sigma$ de identiteit is op $\mathrm{Hom}(V, W^*)$. Inderdaad, neem $f \in \mathrm{Hom}(V, W^*)$ en definieer $g = \sigma(f)$ en $h = \tau(\sigma(f)) = \tau(g)$. Dan geldt voor alle $v \in V$ en $w \in W$ dat $(h(v))(w) = (g(w))(v) = (f(v))(w)$. Dus voor alle $v \in V$ geldt $h(v) = f(v)$, en dat betekent $h = f$. Dus $\tau \circ \sigma$ is inderdaad de identiteit. Wegens symmetrie is ook $\sigma \circ \tau$ de identiteit, dus σ en τ zijn isomorfismen en elkaars inverse.

Tweede alternatieve oplossing. Omdat W eindig-dimensionaal is, is W^* dat ook. Uit Proposition 6.18 volgt wegens eindig-dimensionaliteit dat de afbeelding

$$\pi\colon \mathrm{Hom}(V, W^*) \to \mathrm{Hom}(W^{**}, V^*)$$

die $f \in \mathrm{Hom}(V, W^*)$ stuurt naar $f^\top$ een isomorfisme is. Omdat W eindig-dimensionaal is, is volgens stelling 6.8 de afbeelding α_W een isomorfisme, dus de afbeelding

$$\rho\colon \mathrm{Hom}(W^{**}, V^*) \to \mathrm{Hom}(W, V^*)$$

die $g \in \mathrm{Hom}(W^{**}, V^*)$ stuurt naar $g \circ \alpha_W$ is een bijectie (met een inverse die $h \in \mathrm{Hom}(W, V^*)$ stuurt naar $h \circ \alpha_W^{-1}$).

De afbeelding ρ is lineair, want voor $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ en $g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}(W^{**}, V^*)$ geldt

$$\rho((\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)) = (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) \circ \alpha_W = (\lambda_1 g_1) \circ \alpha_W + (\lambda_2 g_2) \circ \alpha_W = \lambda_1 \rho(g_1) + \lambda_2 \rho(g_2).$$

De samenstelling $\rho \circ \pi\colon \mathrm{Hom}(V, W^*) \to \mathrm{Hom}(W, V^*)$ van de twee isomorfismen π en ρ is dan ook een isomorfisme.

Derde alternatieve oplossing. (Deze oplossing lijkt op de tweede alternatieve oplossing, maar maakt geen gebruik van eindig-dimensionaliteit.) Van een afbeelding $f\colon V \to W^*$ krijgen we een duale afbeelding $f^\top\colon W^{**} \to V^*$, dus na samenstelling met de ons welbekende afbeelding $\alpha_W\colon W \to W^{**}$ krijgen we een lineaire afbeelding $f^\top \circ \alpha_W\colon W \to V^*$. Zij $\sigma\colon \mathrm{Hom}(V, W^*) \to \mathrm{Hom}(W, V^*)$ de afbeelding die $f \in \mathrm{Hom}(V, W^*)$ stuurt naar $f^\top \circ \alpha_W$.

De afbeelding σ is lineair, want voor $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ en $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(V, W^*)$ geldt

$$\begin{aligned}\sigma(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) &= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)^\top \circ \alpha_W = (\lambda_1 f_1^\top + \lambda_2 f_2^\top) \circ \alpha_W \\ &= (\lambda_1 f_1^\top) \circ \alpha_W + (\lambda_2 f_2^\top) \circ \alpha_W = \lambda_1 \sigma(f_1) + \lambda_2 \sigma(f_2).\end{aligned}$$

Analoog definiëren we een afbeelding de andere kant op. Zij $\tau\colon \mathrm{Hom}(W, V^*) \to \mathrm{Hom}(V, W^*)$ de lineaire afbeelding die $g \in \mathrm{Hom}(W, V^*)$ stuurt naar $g^\top \circ \alpha_V$.

We laten nu eerst zien dat $\tau \circ \sigma$ de identiteit is op $\mathrm{Hom}(V, W^*)$. Neem daartoe een $f \in \mathrm{Hom}(V, W^*)$. Uit Proposition 6.17 volgt $f^{\top\top} \circ \alpha_V = \alpha_{W^*} \circ f$, en uit opgave 6d van hoofdstuk 6 volgt $\alpha_W^\top \circ \alpha_{W^*} = \mathrm{id}_{W^*}$. Daarom geldt

$$\begin{aligned}(\tau \circ \sigma)(f) = \tau(f^\top \circ \alpha_W) &= (f^\top \circ \alpha_W)^\top \circ \alpha_V = \alpha_W^\top \circ f^{\top\top} \circ \alpha_V \\ &= \alpha_W^\top \circ \alpha_{W^*} \circ f = \mathrm{id}_{W^*} \circ f = f.\end{aligned}$$

We concluderen dat $\tau \circ \sigma$ inderdaad de identiteit is op $\mathrm{Hom}(V, W^*)$. Net zo is de samenstelling $\sigma \circ \tau$ de identiteit is op $\mathrm{Hom}(W, V^*)$, dus σ en τ zijn isomorfismen en elkaars inverse.

Opgave 6.
Bestaat er een eindig-dimensionale reële inproductruimte V met een endomorfisme $f\colon V \to V$ en een deelruimte $U \subset V$ waarvoor U wel f-invariant is, maar niet f^*-invariant?

Oplossing. Ja, neem bijvoorbeeld $V = \mathbf{R}^2$ met het standaard inproduct, en f het endomorfisme gegeven door vermenigvuldiging met de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dan wordt (zie Example 9.20) f^* gegeven door vermenigvuldiging met de matrix

$$A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nu is $e_1 = (1, 0)$ wel een eigenvector voor f, en niet voor f^*, dus de deelruimte U opgespannen door e_1 is wel f-invariant, maar niet f^*-invariant.