Tentamen lineaire algebra 2
17 januari 2020, 10:15 – 13:15

Dit is *geen* openboektentamen. Alleen niet-programmeerbare rekenmachines zijn toegestaan. Bewijs je antwoorden. Nummer je pagina's. Als je de antwoorden niet op de logische volgorde opschrijft, vermeld dan duidelijk waar welk antwoord staat. De zes opgaven zijn allemaal evenveel waard.

Opgave 1.
Beschouw de matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ -2 & -3 & 5 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Om rekenwerk te besparen geven we dat er geldt $AP = PJ$ en

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Geef een diagonaliseerbare matrix D en een nilpotente matrix N zodanig dat $ND = DN$ en $D + N = A$.
(b) Verifieer dat er geldt $D^2 = -2D$.
(c) Bewijs dat voor elk geheel getal $t \geq 2$ geldt

$$A^t = (-2)^{t-2} D(tN - 2I_3).$$

Opgave 2.
Beschouw de matrix

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal een matrix Q zodanig dat $Q^\top N Q$ diagonaal is.
[Merk op dat Q niet orthogonaal hoeft te zijn.]
(b) Wat is de signatuur van N?

Opgave 3.
Zij A een symmetrische reële matrix met karakteristiek polynoom

$$P_A(t) = (t^3 - t)(t^3 - t^2).$$

(a) Hoeveel rijen en kolommen heeft A?
(b) Wat zijn de eigenwaarden van A?
(c) Bewijs dat het minimum polynoom van A door de gegeven informatie uniek bepaald is en bepaal dat minimum polynoom.
(d) Laat zien dat er geldt $A^3 = A$.

Opgaven 4, 5 en 6 staan op de volgende pagina

Opgave 4.
Zij $f\colon V \to V$ een endomorfisme van een eindig-dimensionale inproductruimte V. Zij $U \subset V$ een deelruimte zodanig dat voor elke $u \in U$ en elke $v \in V$ de vector $f^*(v)$ loodrecht staat op u. Laat zien dat U bevat is in de kern van f.

Opgave 5. Stel V en W zijn twee eindig-dimensionale reële vectorruimtes. Definiëer een isomorfisme

$$\mathrm{Hom}(V, W^*) \to \mathrm{Hom}(W, V^*)$$

en bewijs ook dat je afbeelding daadwerkelijk een isomorfisme is.

Opgave 6.
Bestaat er een eindig-dimensionale reële inproductruimte V met een endomorfisme $f\colon V \to V$ en een deelruimte $U \subset V$ waarvoor U wel f-invariant is, maar niet f^*-invariant?