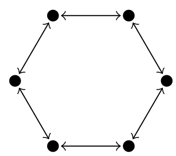
Groepsacties op bomen

Een graaf Γ is een verzameling punten V en een verzameling kanten E met twee functies $b, e\colon\ E \to V$ die aan elke kant een begin- en eindpunt toekennen, en met een operatie $y \mapsto \bar{y}$ op E zodat $b(y) = e(\bar{y})$ en $\bar{\bar{y}} = y$ en $\bar{y} \neq y$ voor alle $y \in Y$. Er is een voor de hand liggend begrip van morfismen tussen grafen, en van deelgrafen.



C_6

P_5

Voor $n \geq 1$ hebben we de *n-cykel* C_n op n punten met $2n$ kanten, en het n-pad P_n met n punten en $2n-2$ kanten. Het pad P_n heeft 2 *uiteinden* als $n \geq 2$.

Een graaf is *samenhangend* als elke paar verschillende punten het paar uiteinden is van een deelgraaf is die isomorf is met een pad. Een graaf is een *bos* als hij geen cykels bevat. Een *boom* is een samenhangend bos.

Men blijkt heel aardig eigenschappen van een groep G te kunnen aflezen aan de wijze waarop G op een boom Γ kan werken. We nemen bij deze werkingen steeds aan dat voor alle $y \in E$ de banen van y en $\bar{y}$ disjunct zijn. Zo'n werking heet *vrij* als voor alle $g \in G$ met $g \neq 1$ en alle $v \in V$ geldt: $gv \neq v$.

Stelling. Een groep is vrij dan en slechts dan als zij vrij werkt op een boom.

Hieruit volgt bijvoorbeeld dat ondergroepen van vrije groepen weer vrij zijn. Ook *geamalgameerde producten* kunnen aanschouwelijk gemaakt worden met werkingen op bomen, alsmede de *HNN-constructie* waarmee een oneindige groep gemaakt kan worden met 4 voortbrengers, die geen ondergroepen van eindige index heeft.

Begeleider: Bart de Smit

Boek: J.-P. Serre, *Trees*, Springer-Verlag, 2nd printing, 2003.