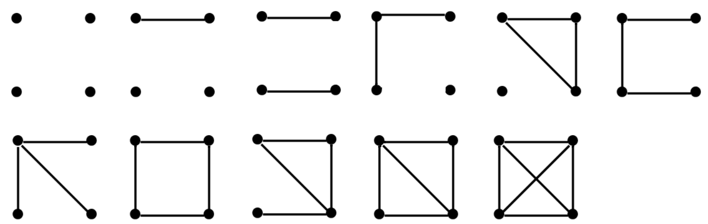
Een massaformule voor abelse groepen

Dit onderwerp is geschikt voor studenten die een onderzoeksproject willen doen op het grensgebied van algebra en combinatoriek.

Massaformule. Bij het tellen van objecten van combinatorische of algebraische soort blijkt het vaak wenselijk te zijn om de objecten met een bepaald gewicht te tellen. We illustreren dit met de 11 grafen op 4 punten:



We tellen hier grafen op *isomorfisme* na: de punten andere namen of plekken geven verandert de graaf niet. Het is niet eenvoudig om een formule te geven voor het aantal grafen op n punten. Maar als we een graaf G 'wegen' met de inverse van zijn aantal graaf-automorfismen wordt het makkelijker. Je hebt daarvoor de *massaformule* voor het aantal grafen op n punten:

$$(*) \qquad \sum_{\#G=n} \frac{1}{\#\operatorname{Aut}(G)} = \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!}.$$

waarbij de som loopt over alle grafen met n punten op isomorfisme na.

Het wegen van een graaf G op n punten met $1/\#\operatorname{Aut}(G)$ heeft een heel natuurlijk interpretatie: als men op een verzameling van n punten een graaf maakt door per paar punten een muntje op te gooien en bij kop de twee punten met een kant te verbinden, dan is het gewicht van een graaf G de relatieve kans dat we graaf G krijgen.

Abelse groepen. De structuur van *eindige abelse groepen* wordt uit de doeken gedaan in sectie 9 van de syllabus Algebra 1. Als p een priemgetal is, en $n \geq 1$ geheel, dan is het aantal abelse groepen van orde $n = p^k$ gelijk aan het zogenaamde partitiegetal van k: het aantal manieren waarop k te schrijven is als de som van een niet-stijgend rijtje positieve gehele getallen.

Vraag: Wat is de massaformule in deze context? Met andere woorden: bereken de linkerkant van $(*)$ waarbij G loopt over de abelse groepen van orde n, op isomorfisme na, en $\operatorname{Aut}(G)$ de groep van groepsautomorfismen van G is. Voor een gegeven n vertelt het antwoord op deze vraag ons ook meteen wat de kans is dat een "willekeurig" gekozen abelse groep van orde n cyclisch is.

Begeleider: Bart de Smit (`http://www.math.leidenuniv.nl/~desmit`)