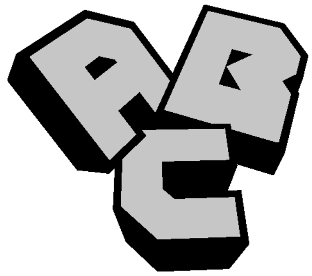
Gillien Geuze
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
geuze@math.leidenuniv.nl

Bart de Smit
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
desmit@math.leidenuniv.nl



Vakantiecursus

Reken mee met ABC

Voor de zestigste keer heeft het CWI de vakantiecursus voor wiskundeleraren georganiseerd. De cursus, die voor het eerst heeft plaatsgevonden op 29 en 31 oktober 1946 in Amsterdam, heeft steeds een bindend thema; in 2006 was dit 'Actuele wiskunde'. Twee lezingen waren gewijd aan het ABC-vermoeden: een van de grote problemen uit de hedendaagse getaltheorie. Het project 'Reken mee met ABC', is bedoeld voor scholieren en docenten. Het vermoeden, dat niet moeilijk te begrijpen is voor middelbare scholieren, is na het bewijs van de laatste stelling van Fermat de nieuwe heilige graal van de getaltheorie geworden. Scholieren worden uitgenodigd om mee te rekenen met programma's die zogenaamde ABC-drietallen zoeken en kunnen op een speciaal daartoe ingericht forum vragen stellen aan experts. Wat is het ABC-vermoeden en waar kan je het beste beginnen met het vinden van informatie?

Het ABC-vermoeden is een van de belangrijkste open problemen in de getaltheorie. De oorsprong van het vermoeden ligt in diepe vermoedens over elliptische krommen, die uiteindelijk ook hebben geleid tot het bewijs van de Laatste Stelling van Fermat. De formulering van het ABC-vermoeden is echter volkomen elementair en de lezer hoeft er niet meer voorkennis voor te hebben dan kennis van optellen van gehele getallen en de factorisatie van een getal in priemfactoren. De letters ABC verwijzen naar de eenvoudige vergelijking waar het vermoeden over gaat:

$$a + b = c.$$

Het ABC-vermoeden doet een uitspraak over hoe de priemfactorisaties van gehele getallen a, b, c die aan deze vergelijking voldoen met elkaar samenhangen. In januari 2007 is het project *Reken mee met ABC* gelanceerd door *Kennislink* en de *Universiteit Leiden*. Het doel is tweeledig. Een breed publiek kan via dit project kennis maken met moderne wiskunde die volop in ontwikkeling is. Bovendien kan iedereen met een computer bijdragen aan het verzamelen van experimentele gegevens over het ABC vermoeden, die dit onderzoek weer verder kunnen helpen.

In dit artikel volgt een korte uiteenzetting over het vermoeden, de wiskundige achtergrond en geschiedenis, enige recente ontwikkelingen, met name van algoritmische soort, en een beschrijving van de activiteiten in het project *Reken mee met ABC*.

Het ABC-vermoeden

Om het vermoeden te kunnen formuleren moeten we eerst weten dat het *radicaal* $r(n)$ van een positief geheel getal n gedefinieerd is als het product van de priemdelers van n:

$$r(n) = \prod_{p|n \text{ priem}} p.$$

Bijvoorbeeld, als $n = 6000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3$, dan is $r(n) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. We kunnen $r(n)$ ook definiëren zonder de priemfactorisatie van n te gebruiken: het is de grootste deler van n die zelf niet door een kwadraat groter dan 1 deelbaar is.

Stel nu dat a, b, en c positieve gehele getallen zijn waarvoor geldt $a + b = c$. We vragen ons nu af hoe klein het getal $r = r(abc)$ kan zijn in verhouding tot c. Om deze vraag preciezer te kunnen formuleren, definiëren we de *kwaliteit* $q(a, b, c)$ als het reële getal q met $c = r^q$. Met andere woorden: $q = \log(c) / \log(r)$.

De eerste observatie is enigszins flauw: als a, b en c een gemeenschappelijke factor hebben die een hoge macht is, dan kan de kwaliteit willekeurig hoog worden. Bijvoorbeeld, als $a = b =$

2^{99}, dan is $c = 2^{100}$, $r = 2$ en $q = 100$. We zullen ons daarom beperken tot het geval dat de getallen a, b en c geen gemeenschappelijke deler groter dan 1 hebben.

Met deze beperking is de hoogst bekende kwaliteit op dit moment het record uit 1987 van de Franse wiskundige Eric Reyssat:

$$2 + 3^{10} \cdot 109 = 23^5$$

$$q = \frac{5\log(23)}{\log(2 \cdot 3 \cdot 109 \cdot 23)} = 1{,}62991168\ldots.$$

Het ABC-vermoeden zegt dat deze kwaliteit nauwelijks boven de 1 komt, in de volgende zin:

ABC-vermoeden. *Voor elk reëel getal $\epsilon > 0$ zijn er hoogstens eindig veel drietallen positieve gehele getallen a, b, c met*

$$\begin{aligned} a + b &= c; \\ \mathrm{ggd}(a,b,c) &= 1; \\ q(a,b,c) &> 1 + \epsilon. \end{aligned}$$

Van dit vermoeden verwachten de meeste deskundigen dat het waar is, en ook dat het bewijs ver buiten het bereik van bestaande wiskundige technieken ligt.

Het is daarentegen betrekkelijk eenvoudig om oneindig veel drietallen te maken waarbij de kwaliteit boven de 1 ligt. Zo'n drietal noemen we een ABC-drietal.

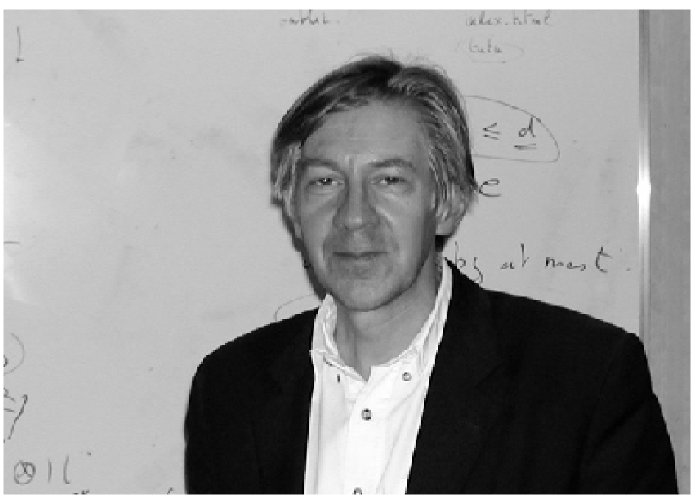
Definitie. *Een* ABC-drietal *is een drietal positieve gehele getallen a, b, c waarvoor geldt*

$$\begin{aligned} a + b &= c; \\ \mathrm{ggd}(a,b,c) &= 1; \\ q(a,b,c) &> 1. \end{aligned}$$

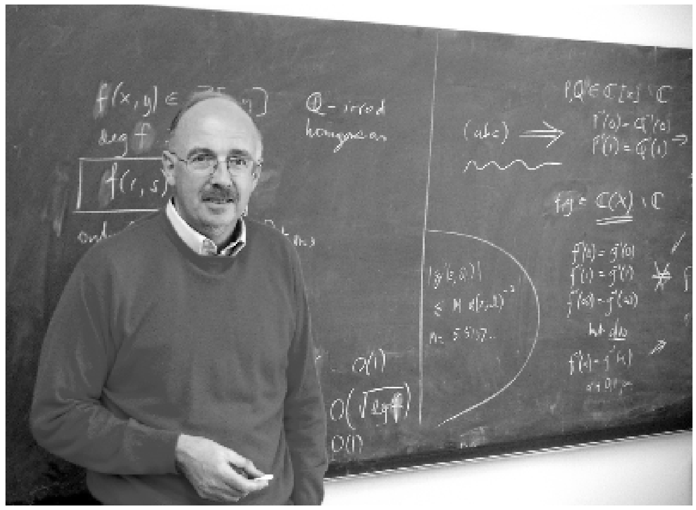
De laatste van deze drie voorwaarden is equivalent met $r(abc) < c$. De ABC-drietallen die bestaan uit getallen onder de 100 zijn $1 + 8 = 9$, $5 + 27 = 32$, $1 + 48 = 49$, $32 + 49 = 81$, $1 + 63 = 64$ en $1 + 80 = 81$.

Stelling. *Er zijn oneindig veel ABC-drietallen.*

Bewijs. Voor elke $n \geq 1$ beschouwen we het drietal $a = 1$, $b = 9^n - 1$ en $c = 9^n$. Deze getallen voldoen duidelijk aan de eerste twee voorwaarden uit de definitie. Om te zien dat het radicaal van abc klein genoeg is, merken we eerst op dat $r(abc) = 3r(b)$. Omdat 9 een 8-voud plus 1 is, is ook 9^n een 8-voud plus 1 en is b deelbaar door 8. Hieruit volgt dat 4 een deler is van $b/r(b)$ en dat $r(b) \leq b/4$. Er geldt dus $r(abc) = 3r(b) \leq \frac{3}{4}b < c$. □



Figuur 1 Joseph Oesterlé



Figuur 2 David Masser

De laatste ongelijkheid uit het bewijs laat zich makkelijk vertalen in een ondergrens voor de kwaliteit:

$$q(1, 9^n - 1, 9^n) > 1 + \frac{\log(4/3)}{2n\log(3)} > 1 + \frac{1}{8n}.$$

Een bovengrens voor de kwaliteit van deze drietallen is niet eenvoudig te geven: we weten niet eens dat deze begrensd is als functie van n. Maar het ABC-vermoeden impliceert dat deze kwaliteit naar 1 convergeert als $n \to \infty$.

De laatste Stelling van Fermat

Het ABC-vermoeden is een zeer sterke uitspraak, waarvan niemand verwacht dat er een eenvoudig bewijs voor zal opduiken. De kracht van de uitspraak blijkt bijvoorbeeld uit de implicaties van het ABC-vermoeden voor de notoir moeilijke vergelijking van Fermat:

$$x^n + y^n = z^n.$$

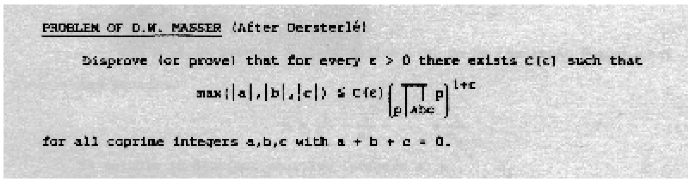
Voor elke $n \geq 3$ geeft een oplossing in positieve gehele onderling ondeelbare getallen x, y, z aanleiding tot een ABC-drietal $a = x^n$, $b = y^n$, $c = z^n$ met kwaliteit

$$\frac{\log c}{\log r(abc)} = \frac{n \log z}{\log r(xyz)} > \frac{n}{3} \geq 1.$$

Het ABC-vermoeden impliceert dus dat voor alle n vanaf een zekere grens de Fermatvergelijking geen oplossingen heeft.

Ontstaan van het vermoeden

De oorsprong van het ABC-vermoeden ligt bij de Franse wiskundige Joseph Oesterlé van het *Institut de Mathématiques de Jussieu* in Parijs. In de jaren tachtig brachten zijn pogingen om het zogenaamde Taniyama-Weilvermoeden te bewijzen voor bepaalde *elliptische krommen* hem tot ongelijkheden waar die elliptisch krom-



PROBLEM OF D.W. MASSER (After Oesterlé)

Disprove (or prove) that for every $\varepsilon > 0$ there exists $C(\varepsilon)$ such that

$$\max(|a|,|b|,|c|) \le C(\varepsilon)\Big(\prod_{p|abc} p\Big)^{1+\varepsilon}$$

for all coprime integers a,b,c with a + b + c = 0.

Figuur 3 Formulering probleem door David Masser

men aan zouden moeten voldoen: de *discriminant* van de kromme moest begrensd zijn door een macht van de *conductor*.

We doen hier geen poging om uit te leggen wat deze begrippen betekenen; dat hoort thuis in een gevorderd doctoraalcollege. Maar voor een drietal onderling ondeelbare gehele getallen a, b, c met $a+b+c=0$ kan men een elliptische kromme maken waarvan de discriminant $(abc)^2$ is, en de conductor $r(abc)$. Oesterlé formuleerde zijn ongelijkheid in dit geval als volgt: er zijn constanten λ en C, zodat voor al zulke drietallen a, b, c geldt:

$$(abc)^2 \le Cr(abc)^{\lambda}.$$

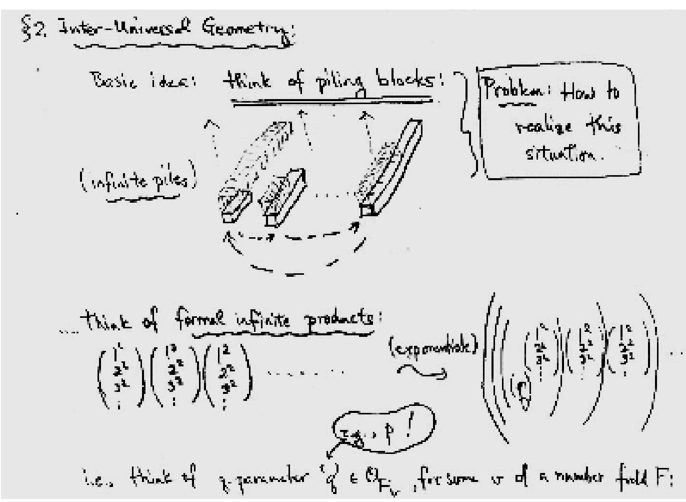
David Masser van de *Universität Basel* woonde in 1985 een lezing bij van Oesterlé aan het *Max-Planck-Institut für Mathematik* in Bonn. Hij begon over de ongelijkheid na te denken los van de context van elliptische krommen. Hij gaf deze equivalente formulering: er zijn constanten C' en λ' zodat voor alle onderling ondeelbare positieve gehele getallen a, b, c met $a+b=c$ geldt:

$$\max\{|a|,|b|,|c|\} \le C' r(abc)^{\lambda'}.$$

Er is een bekende analogie tussen gehele getallen en polynomen over de complexe getallen, waarbij de graad van een polynoom de rol van absolute waarde van een getal speelt en het aantal nulpunten de rol van het radicaal. Het analogon van de laatste ongelijkheid luidt dan als volgt: er zijn getallen λ'', C'', zodat voor alle polynomen f, g, h zonder gemeenschappelijke nulpunten met $f+g+h=0$ geldt:

$$\max\{\mathrm{graad}(f), \mathrm{graad}(g), \mathrm{graad}(h)\} \le \lambda'' Z(fgh) + C'',$$

waarbij $Z(fgh)$ het aantal nulpunten van het polynoom fgh is (geteld *zonder* multipliciteiten). Vergeleken met de vorige ongelijkheid zijn de vermenigvuldigingen vervangen door optellingen omdat de graad van een product van twee polynomen de *som* van hun graden is, terwijl de absolute waarde van het product van twee getallen het *product* van hun absolute waarden is.



Figuur 4 Schets op de webpagina van Mochizuki (2006)

Masser herinnerde zich een vergelijkbare *bewezen* ongelijkheid van Richard Mason, die gepubliceerd is in de *Proceedings* van de grote getaltheorieconferentie in Noordwijkerhout in 1983: als de polynomen niet constant zijn, dan geldt

$$\max\{\mathrm{graad}(f), \mathrm{graad}(g), \mathrm{graad}(h)\} \le Z(fgh) - 1.$$

Blijkbaar mogen we $\lambda'' = 1$ en $C'' = -1$ nemen. Masser vroeg zich af wat de 'correcte' waarde van λ' moest zijn. Hij wist dat de letterlijke terug-vertaling $\lambda' = 1$ teveel van het goede was, en hij vroeg zich af of elke $\lambda' > 1$ wel zou voldoen. Op een symposium aan het Imperial College in London in 1985 ter ere van de wiskundige K. F. Roth formuleerde hij het in de lijst 'open problemen' (zie figuur 3).

De bewering in Massers opgave is equivalent met onze formulering van het ABC-vermoeden. Uit de formulering blijkt dat hij eerder verwachtte dat dit weerlegd zou worden, dan bewezen. En hoewel het bewijs nog steeds mijlen ver weg lijkt te liggen, raken steeds meer experts ervan overtuigd dat het vermoeden waar is.

Takken van sport

Het ABC-vermoeden heeft aanleiding gegeven tot diverse takken van sport. De kracht van het ABC-vermoeden maakt het buitengewoon geschikt om er allerlei mooie gevolgen uit af te leiden. Er zijn ook veel mogelijkheden om het vermoeden te formuleren in een algemenere context. Zie de webpagina (www.math.unicaen.fr/~nitaj/abc.html) van Abderrahmane Nitaj (Caen, Frankrijk), voor een uitgebreide opsomming. We lichten hier een paar andere ontwikkelingen uit.

Op weg naar een bewijs?

De Japanse wiskundige Shinichi Mochizuki van de universiteit van Kyoto is sinds 2000 bezig met een ambitieus programma dat tot doel heeft het ABC-vermoeden te bewijzen. Hiervoor ontwikkelt hij een buitengewoon abstracte theorie die hij 'inter-universele meetkunde' noemt (zie www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~motizuki/research-english.html). Het idee is om het instrumentarium dat in Masons context van polynoomringen tot een bewijs leidt, over te planten naar de gehele getallen. Het is duidelijk dat dit niet zonder slag of stoot zal lukken. Maar als Mochizuki in zijn opzet slaagt, dan zal dat de wereld van de getaltheorie danig op zijn kop zetten.

Recordjacht.

Benne de Weger ontwikkelde in 1985 als bijproduct van zijn promotieonderzoek aan de *Universiteit Leiden* een methode om ABC-drietallen van hoge kwaliteit te maken. Hij ontdekte 14 ABC-drietallen met kwaliteit boven de 1.4. De grens van 1.4 heeft hij naar eigen zeggen uit zijn duim gezogen, maar desalniettemin staan ABC-drietallen met kwaliteit boven de 1.4 nu internationaal bekend als 'goede ABC-drietallen'. Er zijn er nu zo'n 200 bekend en op internet wordt de laatste stand van zaken bijgehouden op www.minet.uni-jena.de/~aros/abc.html. Nieuwe goede ABC-drietallen worden soms gevonden door verbeterde hardware en verbeterde implementaties van bekende zoekmethoden en soms door het ontdekken van geheel nieuwe methoden. Zo zijn er in 2003 enige tientallen gevonden door Tim Dokchitser met een methode die Jaap Top van de *Rijksuniversiteit Groningen* ook

a	b	c	q	**ontdekker**
2	$3^{10} \cdot 109$	23^5	$1,630$	Eric Reyssat
11^2	$3^2 \cdot 5^6 \cdot 7^3$	$2^{21} \cdot 23$	$1,626$	Benne de Weger
$19 \cdot 1307$	$7 \cdot 29^2 \cdot 31^8$	$2^8 \cdot 3^{22} \cdot 5^4$	$1,623$	Browkin Brzezinski
283	$5^{11} \cdot 13^2$	$2^8 \cdot 3^8 \cdot 17^3$	$1,581$	Browkin Brzezinski, Nitaj
1	$2 \cdot 3^7$	$5^4 \cdot 7$	$1,568$	Benne de Weger
7^3	3^{10}	$2^{11} \cdot 29$	$1,547$	Benne de Weger
$7^2 \cdot 41^2 \cdot 311^3$	$11^{16} \cdot 13^2 \cdot 79$	$2 \cdot 3^3 \cdot 5^{23} \cdot 953$	$1,544$	Nitaj
5^3	$2^9 \cdot 3^{17} \cdot 13^2$	$11^5 \cdot 17 \cdot 31^3 \cdot 137$	$1,537$	te Riele, Montgomery
$13 \cdot 19^6$	$2^{30} \cdot 5$	$3^{13} \cdot 11^2 \cdot 31$	$1,527$	Nitaj
$3^{18} \cdot 23 \cdot 2269$	$17^3 \cdot 29 \cdot 31^8$	$2^{10} \cdot 5^2 \cdot 7^{15}$	$1,522$	Nitaj

Tabel 1 De tien hoogst bekende kwaliteiten van ABC-drietallen

al eerder gebruikte. De top-tien van ABC-drietallen met de hoogst bekende kwaliteit wordt weergegeven in tabel 1. Als het ABC-vermoeden waar is, dan is er een ABC-drietal waarvoor geen enkel ander ABC-drietal een hogere kwaliteit heeft. Experts achten het niet onwaarschijnlijk dat Reyssat's drietal de absolute kampioen is.

Een betere maat voor kwaliteit?
Het ABC-vermoeden impliceert voor elke $q > 1$ dat er vanaf een zekere ondergrens op c geen ABC-drietallen zijn met kwaliteit minstens q. Van alle ABC-drietallen a, b, c met kwaliteit dicht bij q vinden we die met de grootste c daarom de 'beste'.

Dit wordt tot uitdrukking gebracht in een andere kwaliteitsmaat voor ABC-drietallen. We definiëren de *verdienste* $m(a,b,c)$ van een ABC-drietal a, b, c als

$$m = m(a,b,c) = (q-1)^2(\log r)\log\log r,$$

waarbij $q = q(a,b,c)$ en $r = r(abc)$. Nu geldt

$$\frac{c}{r} = \exp\sqrt{m\frac{\log r}{\log\log r}}.$$

De aanleiding voor deze definitie is nog ongepubliceerd werk van Cameron L. Stewart van de *University of Waterloo* in Canada en Gérald Tenenbaum van het *Institut Élie Cartan* in Nancy in Frankrijk. Zij hebben een verfijnd ABC-vermoeden geformuleerd, dat zegt dat er voor elke $m > 48$ maar eindig veel ABC-drietallen zijn met verdienste minstens m, en dat er een oneindige rij ABC-drietallen bestaat waarvan de verdienste convergeert naar 48. De hoogst bekende verdienste is van het drietal in tabel 1 met de grootste c:

$$m(7^2 \cdot 41^2 \cdot 311^3, 11^{16} \cdot 13^2 \cdot 79, 2 \cdot 3^3 \cdot 5^{23} \cdot 953) = 31,54\ldots$$

Het verfijnde ABC-vermoeden is gebaseerd op een subtiele heuristiek die zegt dat $r(a+b)$ zich onafhankelijk gedraagt van $r(a)$ en $r(b)$ als a en b onderling ondeelbaar zijn en op bewezen stellingen over het gedrag van de functie $n \mapsto r(n)$.

Deze heuristieken hebben meer interessante gevolgen. Gegeven een reëel getal $q > 1$ zegt het ABC-vermoeden dat er maar eindig veel ABC-drietallen zijn met kwaliteit minstens q. Maar hoe groot kan zo'n drietal dan maximaal zijn? Als we q van boven naar 1 laten naderen, dan voorspelt het verfijnde ABC-vermoeden hoe hard dit grootste ABC-drietal zal groeien.

ABC-drietallen tellen.
Voor elk getal X noteren we het aantal ABC-drietallen (a,b,c) met $a < b$ en $c < X$ als $N(X)$. We weten uit de eerder genoemde

X	$N(X)$			
10	1	$1+8=9$	$13+243=256$	$1+675=677$
10^2	6	$5+27=32$	$81+175=256$	$1+728=729$
10^3	31	$1+48=49$	$1+288=289$	$25+704=729$
10^4	120	$1+63=64$	$100+243=343$	$104+625=729$
10^5	418	$1+80=81$	$32+343=375$	$200+529=729$
10^6	1268	$32+49=81$	$5+507=512$	$1+960=961$
10^7	3499	$4+121=125$	$169+343=512$	$343+625=968$
10^8	8987	$3+125=128$	$1+512=513$	
10^9	22316	$1+224=225$	$27+512=539$	
10^{10}	51677	$1+224=243$	$1+624=625$	
10^{11}	116978	$2+243=245$	$49+576=625$	
10^{12}	252856	$7+243=250$	$81+544=625$	

Tabel 2 Het aantal ABC-drietallen van hoogstens n cijfers voor $n \leq 12$ en de 31 abc-drietallen onder de duizend

a	b	c	kwaliteit
$2^7 \cdot 89^2$	$5^4 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 71^4$	$3^{13} \cdot 19^3 \cdot 4547^2$	1.4342
$2^{32} \cdot 73^3$	$3^{14} \cdot 5^3 \cdot 11 \cdot 13^5 \cdot 557$	$7^{13} \cdot 23^2 \cdot 163^2$	1.4323
2^{39}	$3^8 \cdot 13^2 \cdot 23^5$	$5^8 \cdot 151^2 \cdot 863$	1.4210
$3^{17} \cdot 89^4$	$7^3 \cdot 61 \cdot 359^5$	$2^{13} \cdot 5 \cdot 19^8 \cdot 191$	1.4068
$2^{27} \cdot 17^2$	$7^{11} \cdot 3041^2$	$3 \cdot 5^3 \cdot 13^8 \cdot 23^2 \cdot 113$	1.4062
1	$3^7 \cdot 7^5 \cdot 13^5 \cdot 17 \cdot 1831$	$2^{30} \cdot 5^2 \cdot 127 \cdot 353^2$	1.4012

Tabel 3 Zes nieuwe ABC-drietallen met kwaliteit boven 1,4

stelling dat $N(X)$ naar oneindig gaat als X naar oneindig gaat. Maar hoe hard gaat $N(X)$ naar oneindig? Men kan het volgende bewijzen: Voor elke $\epsilon > 0$ zijn er $C, C' > 0$ zodat

$$C \exp((\log X)^{1/2-\epsilon}) \leq N(X) \leq C' X^{2/3+\epsilon}.$$

Het bewijs van deze stelling hoort thuis in de analytische getaltheorie en is vooralsnog niet gepubliceerd. De ondergrens is recent aangekondigd door Sander Dahmen, promovendus aan de *Universiteit Utrecht* en de bovengrens is gevonden naar aanleiding van de algoritmische inspanningen van het project *Reken mee met ABC*; zie hieronder.

Het ligt in de verwachting dat het daadwerkelijke asymptotische gedrag van $N(X)$ dichter bij de ondergrens dan bij de bovengrens zal liggen.

Een net door de zee.
Als onderdeel van het project *Reken mee met ABC* wordt een project voor gedistribueerd rekenen gestart dat tot doel heeft om alle ABC-drietallen tot een bepaalde grens te vinden. Het gaat hierbij dus niet om speciale methoden die speciaal wenselijke ABC-drietallen moeten produceren, maar om een methode die geen enkel ABC-drietal overslaat.

Hiervoor is een algoritme ontwikkeld dat op een efficiënte wijze het gebied van paren (a, b) met $a + b < X$ afzoekt. Experimenten van Jeroen Demeyer van de *Universiteit Gent* met dit algoritme hebben geleid tot de bovenstaande tabel met precieze waarden voor $N(X)$ en tot een zestal nieuwe 'goede' ABC-drietallen, met kwaliteit boven 1.4.

Om ABC-drietallen op een grotere schaal te kunnen zoeken worden de rekentaken gedistribueerd via de *Berkeley Open Infrastructure for Network Computing*, waarmee iedereen thuis op zijn computer ABC-drietallen kan vinden en toevoegen aan de statistieken.

Scholen

Het project *Reken mee met ABC* probeert scholieren en docenten op verschillende manieren te betrekken bij de moderne getaltheorie. Het poogt de indruk weg te nemen dat de wiskunde al af is door juist de open problemen te benadrukken. Op dit moment wordt gedacht aan de volgende activiteiten die vanuit de website gecoördineerd worden.

- Scholen kunnen meedoen met het zoeken naar nieuwe ABC-drietallen door rekentijd op PC's beschikbaar te stellen. De door scholen gevonden drietallen worden apart bijgehouden in het BOINC-project.
- Veel elementaire onderwerpen uit de wiskunde die in nauw verband staan met het ABC-vermoeden hebben een kleurrijke geschiedenis die doorloopt tot op de dag van vandaag. Deze zijn uitstekend geschikt om de cultuur van de wiskunde mee voor het voetlicht te brengen, zowel binnen het klaslokaal en daarbuiten. Daarom zullen deze onderwerpen in historische context op verschillende niveaus toegankelijk gemaakt worden op de website, onder meer in de vorm van korte lesbrieven.
- Er komt een forum op de website waar scholieren vragen kunnen stellen aan elkaar en aan een deskundige. Hier kunnen misverstanden opgehelderd worden en kunnen open vragen bekeken worden, zoals: "zijn er ABC-drietallen die uit Fibonaccigetallen bestaan?"
- Voor het schrijven van profielwerkstukken worden verschillende thema's en open problemen aangedragen en worden materiaal en links van het goede niveau verzameld. Dit wordt verder ondersteund door het forum en door de aangeboden lesbrieven.
- Er zullen wedstrijden worden uitgeschreven met prijzen voor bijvoorbeeld het mooiste nieuwe ABC-drietal, het beste profielwerkstuk, de beste forum-bijdrage of andere ABC-prestaties.

Voor uitgebreide informatie verwijzen we naar de webpagina van het project: www.rekenmeemetabc.nl.