Hoofdstuk II

Het Droste-effect in Eschers Prententententoonstelling

Bart de Smit

Op de litho *Prententententoonstelling* van M.C. Escher (1898–1972) staat een jongeman in een galerij te kijken naar een prent van een stad. Met een draaiende vervorming is Escher erin geslaagd om de galerij waar de jongeman in staat deel te laten uitmaken van de stad op de prent. In het midden van de draaikolk heeft Escher een wit gat opengelaten met zijn handtekening.

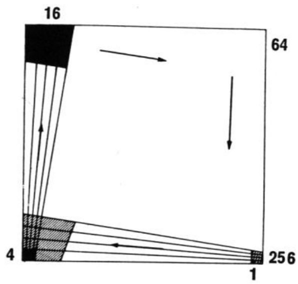
Fig. 1. Prententententoonstelling (1956)

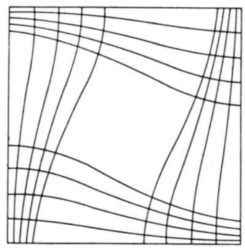
De getaltheoreticus Hendrik Lenstra van de Universiteit Leiden en de University of California in Berkeley heeft begin 2000 de wiskundige structuur achter Eschers litho blootgelegd. Deze structuur maakt ook duidelijk wat zich in het mysterieuze gat afspeelt. Met hulp van een scanner, programmatuur en twee tekenaars is in een 3 jaar lopend project aan de Universiteit Leiden een reconstructie van de prent gemaakt waarin het gat is opgevuld. Tevens zijn er allerlei varianten van de prent gemaakt en animaties waarmee de kijker het gat in vliegt.

Zonder dat er in Eschers litho enige herhaling zichtbaar is, blijkt in een geïdealiseerde versie van de prent een Droste-effect op te treden: de prent bevat een versie van zichzelf die een factor 22,5836845286... verkleind is en gedraaid is over een hoek van 157,6255960832... graden met de klok mee. Deze getallen zijn eenduidig bepaald door de wiskunde achter de principes waar Escher, die geen formele training als wiskundige had, op intuïtieve wijze mee werkte. Eschers weergaloze fantasie heeft hem in deze prent tot de structuur van een elliptische kromme over de complexe getallen geleid.

Eschers constructie

In *De toverspiegel van MC Escher* van Bruno Ernst (Meulenhoff, Amsterdam, 1976), waar ook de illustraties bij deze sectie vandaan komen, wordt uitgelegd hoe Escher zijn litho gemaakt heeft. Escher wilde een "*ringvormige uitdijing*" uitbeelden. Als we onze blik over de prent laten gaan, en we bewegen met de klok mee rond het centrum, dan zien we inderdaad dat we steeds inzoomen. "*Escher probeerde aanvankelijk het idee met rechte lijnen te verwezenlijken. Intuïtief kwam hij echter tot de gebogen lijnen van figuur [2]. De oorspronkelijke vierkantjes blijven dan ook beter 'vierkant'.*"





FIGUUR 2. Ringvormige uitdijing met rechte en met kromme lijnen

Escher construeerde langs deze weg het speciale millimeterpapier van Figuur 3. Met de klok mee lopend langs de vier zijden van het centrale vierkant wordt de schaal vier maal een factor 4 vergroot. Als we rond zijn ligt het rooster als het ware over zichzelf heengevouwen waarbij het een factor $4^4 = 256$ vergroot is.

Escher vervaardigde vier onvervormde schetsen waarin de man in de prentengalerij naar een prent van een stad kijkt, waarin de prentengalerij weer staat. Deze schetsen passen cyclisch in elkaar door steeds met een factor 4 te schalen. Wiskundig gezien vormen de vier prenten dus één plaatje met het Droste-effect: het bevat zichzelf na verkleining met een factor $4^4 = 256$. Met het rechte ruitjespapier op de schetsen bracht Escher toen vierkantje voor vierkantje zijn schetsen over op zijn kromme millimeterpapier (Figuur 4).

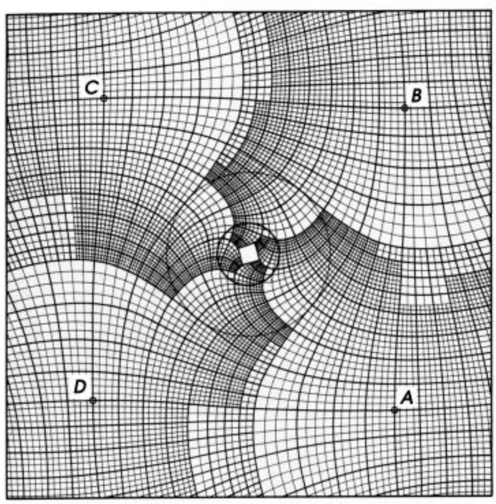
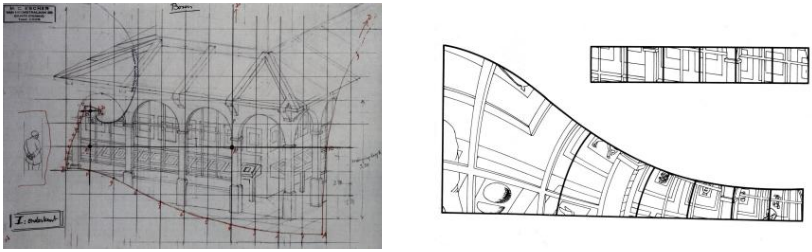


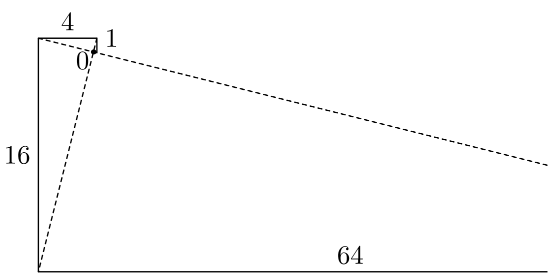
Fig. 3: Eschers rooster



FIGUUR 4. Een rechte schets van Escher, en het inpassen in het kromme rooster

Een ander soort Droste-effect

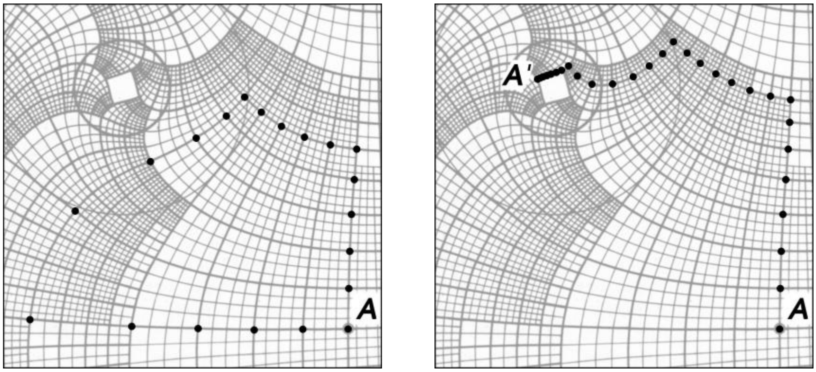
Eschers methode geeft een heel precieze manier om heen en weer te gaan tussen de kromme wereld van de Prententententoonstelling en de rechte wereld van Eschers vier schetsen. Als we bijvoorbeeld over roosterlijnen het vierkant $ABCDA$ in de kromme wereld aflopen, hoe ziet dat er dan uit in de rechte wereld? Welnu, we lopen steeds over roosterlijnen, die in de rechte wereld dus horizontale of verticale rechten zijn, en de rechte afstand die we lopen is door de verfijning in het rooster na elke hoek linksom steeds 4 maal zo groot. Dit pad in de rechte wereld staat in Figuur 5. Door geschikte keuze van de oorsprong zien we dat het eindpunt van het pad in de rechte wereld krijgen door het beginpunt met 256 te vermenigvuldigen. Het Droste-effect in de rechte wereld zorgt ervoor dat de voorstelling op de tekening bij begin- en eindpunt van de wandeling inderdaad “dezelfde” is, maar dan op een verschillende schaal.



FIGUUR 5. Het pad $ABCDA$ in de rechte wereld

Laten we nu in de rechte wereld een vierkant aflopen, te beginnen bij het punt dat in de kromme wereld A heet. Als we vijf eenheden richting B lopen, dan links afslaan, weer 5 eenheden lopen, en dat nog 2 keer doen, dan zijn we terug waar we begonnen. Maar als we het vierkant iets groter maken gebeurt er iets vreemds. Als we in de rechte wereld een vierkant van 7×7 aflopen dan geeft dat in de kromme wereld een wandeling waarvan het beginpunt A niet hetzelfde is als het eindpunt A'.

Omdat A en A' blijkbaar met hetzelfde punt in de rechte wereld corresponderen zou Eschers procedure idealiter aan de punten A en A' dezelfde kleur



FIGUUR 6. Wandelingen langs een vierkant van 5×5 en 7×7, weergegeven in de kromme wereld.

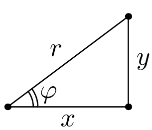
moeten toekennen. In de litho is dit niet te zien, omdat A' in het witte gat valt. Als we een vierkant aflopen met zijden langer dan 7 komen we in hetzelfde punt A' uit.

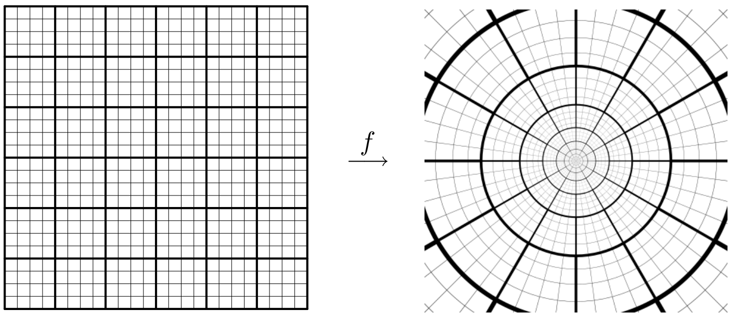
Doen we dit nu voor een ander beginpunt P in plaats van A, dan zien we dat een wandeling over een voldoende groot vierkant ons voert naar een punt P'. Kiezen we P op de roosterlijnen AB, BC, CD, DA, dan zal P' op de rand van het binnenste vierkantje in het rooster liggen. We krijgen steeds P' uit P door om het midden te draaien over zo'n 160 graden, en een factor van ongeveer 20 te verkleinen. Dit is de verborgen symmetrie in de Prententententoonstelling—het is een Droste-effect waarbij we niet alleen schalen, maar ook draaien. Voor de schaalfactor en de hoek hebben we in dit stadium alleen een grove waarde, gemeten uit Eschers rooster.

Conforme coördinaten

We weten nu dat de rechte wereld en de kromme wereld elk hun eigen soort Droste-effect hebben, en we hebben Eschers rooster om te zien welke punten in de rechte wereld corresponderen met welke punten in de kromme wereld. Maar hoe komt Eschers rooster aan zijn vorm? Volgens Escher was zijn rooster zo gekozen dat de kleine vierkantjes in de rechte wereld ook vierkantjes bleven in de kromme wereld. In wiskundige termen betekent dit dat de afbeelding tussen de kromme en de rechte wereld *conform* is.

Het is nu handig om over te gaan op *conforme poolcoördinaten*. We zijn gewend om een punt P in het vlak aan te geven met een paar (x, y) van reële getallen. De poolcoördinaten (r, φ) van dit punt geven de afstand r tot de oorsprong aan, en de hoek waaronder het punt P vanuit de oorsprong gezien wordt. De afbeelding $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die een paar (r, φ) stuurt naar $(x, y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ geeft de coördinatentransformatie weer. Merk op dat poolcoördinaten van een punt niet uniek zijn: de hoek φ is alleen maar bepaald op veelvouden van 360 graden na.



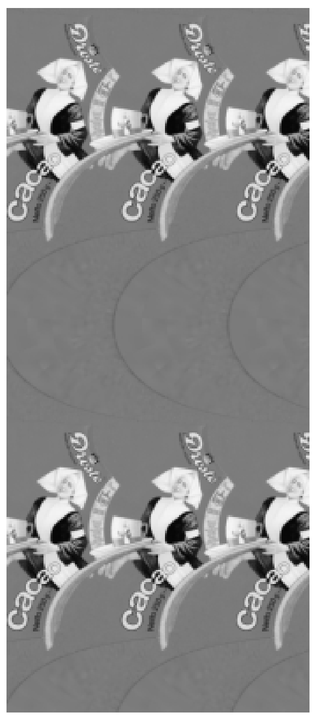


FIGUUR 7. Conforme poolcoördinaten

Met twee kleine ingrepen is deze coördinatentransformatie conform te maken: we moeten de hoek niet in graden meten, maar in radialen, en we moeten de afstand van P tot de oorsprong op een logarithmische manier meten. Met andere woorden, de afbeelding

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad f(l,\varphi) = (e^l \cos(\varphi), e^l \sin(\varphi)))$$

is conform. Voor wie complexe getallen kent: dit is de complexe exponentiële functie $z \mapsto e^z$. De conforme poolcoördinaten van het punt (x, y) zijn nu gegeven door (l, φ) waarbij $l = \log(r)$. De functie f is in Figuur 7 afgebeeld. De kleine vierkantjes links hebben afmeting $\pi/24 \times \pi/24$, en de dikke cirkels in het rechter plaatje liggen steeds een schaalfactor $e^{\pi/6} = 1{,}68809179\ldots$ uit elkaar.

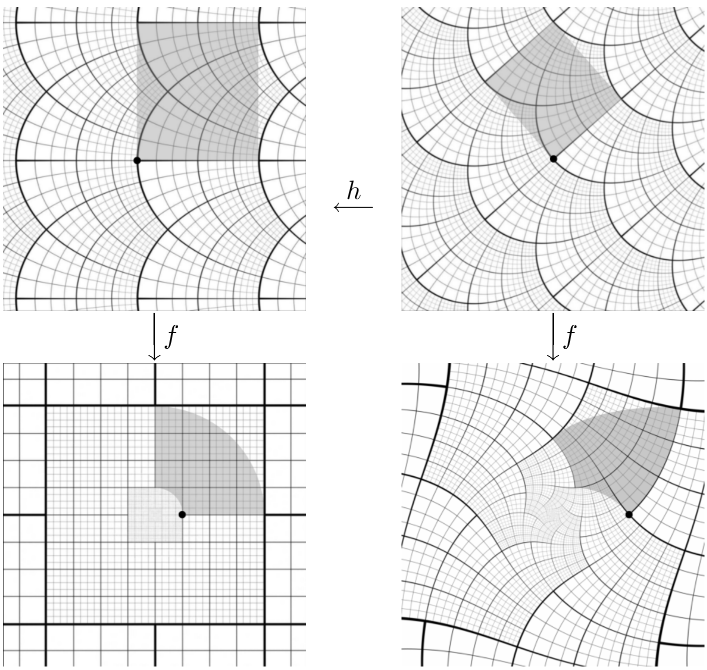


Als we een plaatje hebben op het xy-vlak, dan kunnen we het plaatje "terugtrekken" over de afbeelding f. In het resulterende plaatje is de kleur van het punt (l, φ) de kleur van het punt $(x, y) = f(l, \varphi)$ in het oorspronkelijke plaatje. We noemen dit het corresponderende logarithmische plaatje. In Figuur 7 staat links het logarithmische plaatje van het plaatje rechts.

Zo'n logarithmisch plaatje heeft altijd een verticale translatie-symmetrie over afstand 2π, want er geldt $f(l, \varphi + 2\pi) = f(l, \varphi) = (x, y)$. Als het oorspronkelijke plaatje bovendien een symmetrie heeft die bestaat uit draaien over een hoek φ_0 radialen en schalen met een factor r_0, dan heeft het teruggetrokken plaatje nog een symmetrie: translatie over $(\log(r_0), \varphi_0)$. Hiernaast is dat te zien aan de logarithmische versie van het bekende Droste-plaatje: de verticale periode is 2π en de horizontale periode is ongeveer 1,8.

Als we de teruggetrokken plaatjes maken van de rechte en de kromme wereld krijgen we dus twee behangpatronen—patronen die symmetrisch zijn onder twee translaties in verschillende richtingen. Beide logarithmische plaatjes hebben een translatiesymmetrie over $(0, 2\pi)$. De eerste heeft daarnaast een translatiesymmetrie over $(\log(256), 0)$ en de tweede over $(\log(r_0), \varphi_0)$, waarbij φ_0 ongeveer $160\pi/180$ is en r_0 ongeveer 20.

Het rooster van Escher vertelt ons hoe we bij een punt in de kromme wereld het corresponderende punt in de rechte wereld moeten vinden. Hieruit volgt dat dit in conforme poolcoördinaten betekent dat we een afbeelding $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ krijgen met $h(0,0) = (0,0)$, en met de eigenschap dat $f(h(l, \varphi))$ het punt is in de rechte wereld dat hoort bij het punt $f(l, \varphi)$ in de kromme wereld. Omdat f conform is, is h bovendien conform. Een stelling uit de complexe functietheorie vertelt ons nu dat h een schaling is gevolgd door een draaiing.



FIGUUR 8. Eschers transformatie in conforme poolcoördinaten

Met andere woorden: de ingewikkelde afbeelding van Eschers rooster is in conforme poolcoördinaten gewoon een schaling gecombineerd met een draaiing. Dit is een krachtig resultaat, en het stelt ons in staat om zowel de afbeelding h als het paar $(\log(r_0), \varphi_0)$ te bepalen.

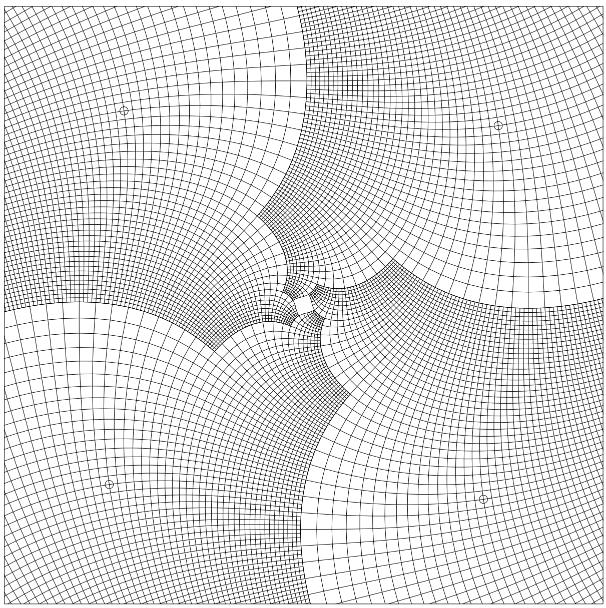
Laten we bijvoorbeeld kijken waar de wandeling $ABCDA$ op het kromme rooster mee correspondeert in de logarithmische plaatjes van de rechte en de kromme wereld. Als $A = f(P)$, en we volgen het pad vanaf het punt P van $\mathbb{R}^2$ in conforme poolcoördinaten, dan zijn we aan het eind van de wandeling bij $P + (0, 2\pi)$. Maar het pad in de rechte wereld volgend volgens Figuur 5 vanaf

$h(P)$ komen we uit bij $h(P) + (\log(256), 2\pi)$. Omdat h slechts een schaling en een draaing is, moet nu $h(0, 2\pi) = (\log(256), 2\pi)$, waaruit we de hoek en de schaalfactor van h makkelijk aflezen. We zien ook dat $h(\log(r_0), \varphi_0) = (\log(256), 0)$, en omdat h nu bekend is kunnen we ook de hoek en de schaalfactor van de symmetrie van de Prententententoonstelling uitrekenen: de schaalfactor is

$$r_0 = e^{4\pi^2(\log 256)/(4\pi^2+(\log 256)^2)} = 22{,}583684528618492\ldots$$

en de hoek is

$$360(\log 256)^2/(4\pi^2 + (\log 256)^2) = 157{,}625596083230310\ldots \text{ graden.}$$



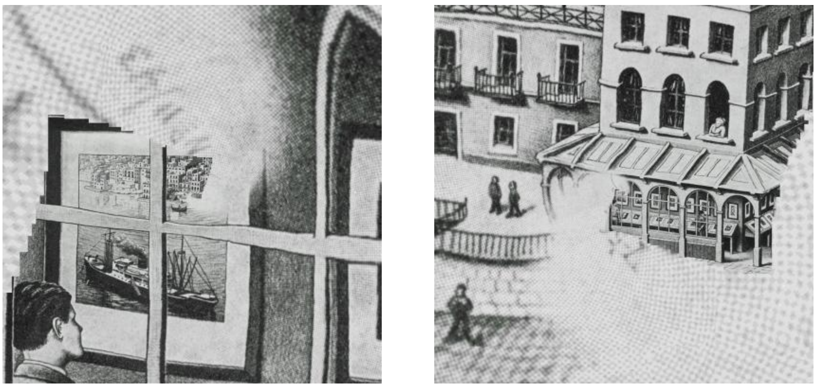
FIGUUR 9. Het conforme rooster

We concluderen dat de symmetrie-eisen en de eis dat Eschers rooster conform is, de situatie volledig star vastleggen: er is geen keuze meer voor de factor r_0 en de hoek φ_0. Het conforme rooster in Figuur 9, dat gemaakt is door Richard Groenewegen, voldoet aan deze ideale symmetrie. Het lijkt treffend veel op Eschers rooster in Figuur 3. Dat het vierkantje in het midden in Figuur 9 kleiner is dan in Eschers rooster komt doordat de ideale waarde van r_0 wat groter is dan de gemeten waarde voor r_0 in Eschers rooster.

De structuur van behangpatronen, die op conforme equivalentie na bekeken worden, staat in de wiskunde bekend als “Riemann oppervlak van geslacht 1” of ook wel “elliptische kromme over de complexe getallen”. Deze elliptische krommen spelen een centrale rol in de wiskunde, zoals ook in het hoofdstuk van Don Zagier te lezen is.

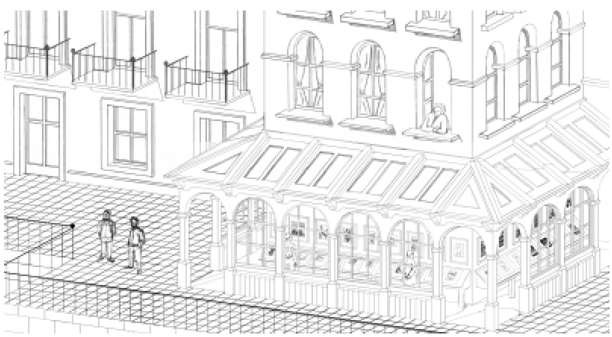
Het gat vullen

De transformaties staan nu klaar om een invulling van het gat te maken. Joost Batenburg, destijds wiskunde-student in Leiden, heeft software geschreven om met een scan van Eschers rooster en een scan van de Prentententoonstelling de procedure van Escher in de omgekeerde richting te volgen. Dit geeft aanleiding tot (ongeveer) rechte plaatjes van de rechte wereld, waarin het witte gat nu een spiraal is geworden.



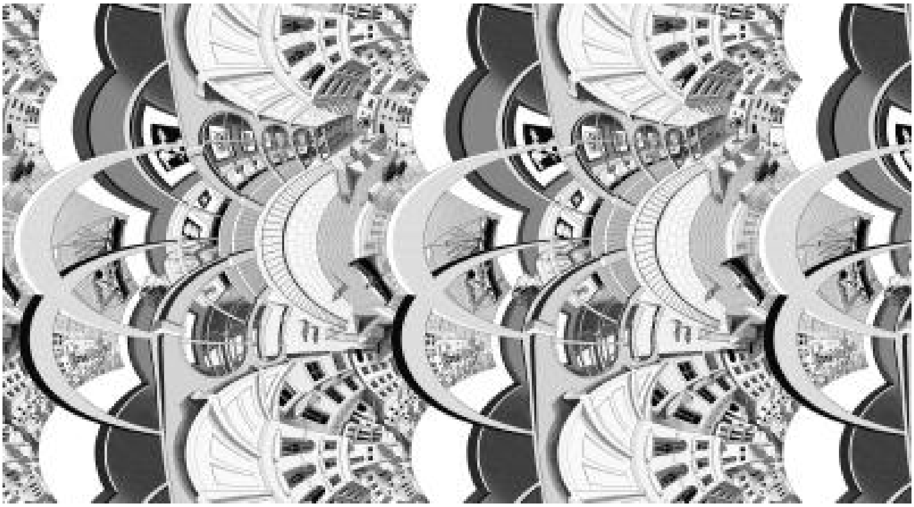
FIGUUR 10. De volgens Eschers eigen rooster rechtgetrokken litho. Het gat in de prent van Escher is hier een witte spiraal.

Hiermee hebben tekenaars Hans Richter en Jacqueline Hofstra vier nieuwe rechte schetsen gemaakt waarin die spiraal opgevuld is, en een aantal lijnen is rechtgetrokken.

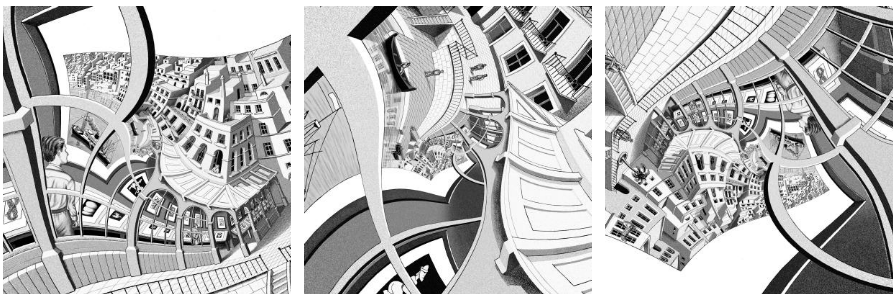


FIGUUR 11. Nieuwe schets

Om de schetsen van grijstinten te voorzien is eerst de logarithmische versie gemaakt zodat de pixel-dichtheid zowel in de rechte als in de kromme wereld schaalinvariant wordt. Dit plaatje is vervolgens gedetailleerd ingekleurd door Jacqueline Hofstra, zie Figuur 12. Met een computerprogramma van Joost



FIGUUR 12. De ingevulde logarithmische versie van Eschers prent, met verticale periode 2π en horizontale periode $\log(256)$



FIGUUR 13. De gecompleteerde prent, met vergrotingen van het midden met een factor 4 en 16

Batenburg is hiermee een ingevulde Prententententoonstelling gemaakt. In figuur 13 staan tevens twee vergrotingen, waar inderdaad uit blijkt dat in de plek waar het gat zat, de hele prent weer schuilt.

Variaties van de prent en computeranimaties zijn te zien op de website `escherdroste.math.leidenuniv.nl`. Een artikel van Sara Robinson over het project in Leiden staat in SIAM News: `siam.org/siamnews/10-02/escher.pdf` Veel informatie en werken van Escher zijn te vinden op de officiële M.C. Escher website: `mcescher.nl`. Een originele afdruk van de Prententententoonstelling is te zien in het museum "Escher in het Paleis" in Den Haag.