Hoofdstuk I

Platte en bolle meetkunde

F. van der Blij

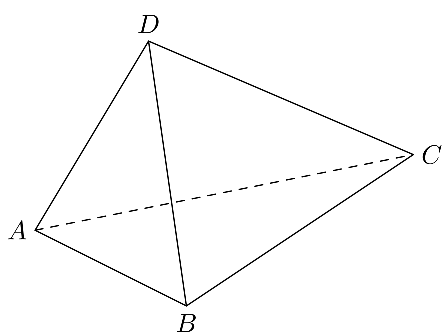
Dit hoofdstuk bevat een door de redactie gemaakte bewerking van een in Utrecht op 6 oktober 1993 gegeven Kaleidoscoop A college van F. van der Blij. Graag willen we professor van der Blij hartelijk danken voor het beschikbaar stellen van zijn aantekeningen.

Inleiding

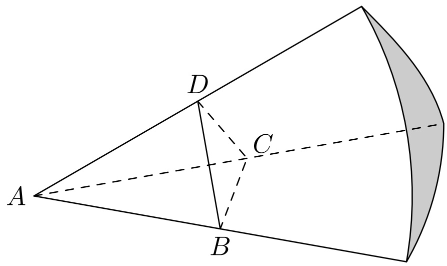
Een van de oudste en meest bekende stellingen van de meetkunde zegt, dat de som van de hoeken van een driehoek 180 graden is. Hierin worden de hoeken in graden gemeten. Dat kan ook anders; een hoek kan je ook meten door het hoekpunt als middelpunt van een cirkel met straal 1 te nemen. De benen van de hoek sluiten dan een stukje cirkelboog in, en de lengte daarvan levert een maat voor de hoek. Dit geeft dus gewoon de grootte van een hoek in radialen. Met dit begrip krijgen we dan

STELLING. *De som van de hoeken van een driehoek is* π*.*

In dit hoofdstuk gaan we ruimtemeetkunde bedrijven. De rol van de driehoek gaat dan vervuld worden door het viervlak.



We zien vier hoekpunten. De Hoek bij A zullen we, in analogie met gewone hoeken in radialen, meten door A als middelpunt van een bol met straal 1 te nemen. De vlakken ABC, ACD en ABD snijden de bol in drie cirkels (deze hebben straal 1 en middelpunt A). Het gebied binnen de Hoek correspondeert dan met een boldriehoek op onze bol. Dit is een figuur begrensd door drie stukken van de gegeven cirkels op de bol.



De grootte van de Hoek definiëren we als de oppervlakte van deze boldriehoek. We zullen hier alleen boldriehoeken bekijken waarvan de cirkelbogen kleiner dan een halve cirkel zijn. Het is wel duidelijk, hoe we met onze definitie de grootte van een gewone "kamerHoek" kunnen bepalen. Immers, de bijbehorende boldriehoek vormt precies een achtste deel van het boloppervlak. De oppervlakte van een bol met straal r is $4\pi r^2$, dus deze boldriehoek heeft oppervlakte $\pi/2$. Een gewone "rechte" Hoek heeft dus, net als in het vlak, grootte $\pi/2$. Het is al minder eenvoudig de grootte van een Hoek van een regelmatig viervlak te berekenen.

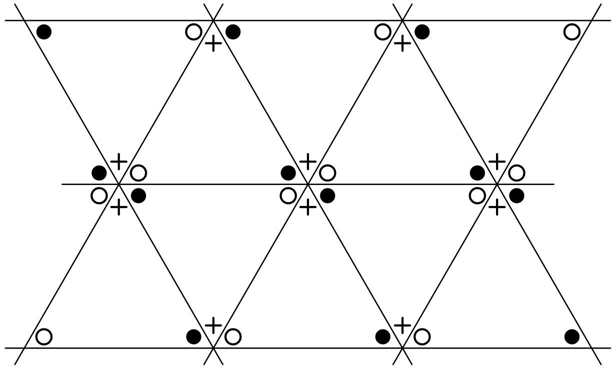
De vraag, die de genoemde stelling plus de zojuist gegeven definitie oproept, is de volgende.

- Hoe groot is de som van de Hoeken van een willekeurig viervlak?

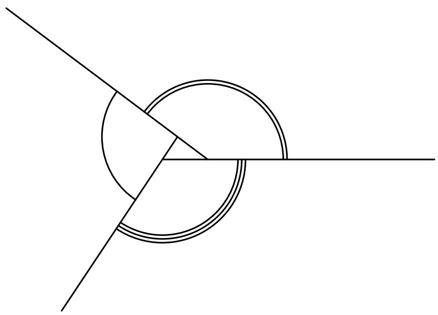
Intermezzo 1

In het gewone platte vlak is de som van de hoeken van een driehoek gelijk aan π. Hoe wordt dit eigenlijk bewezen? Misschien geeft het bewijs van het vlakke geval ons inspiratie voor de berekening in het driedimensionale geval. Helaas is het een moeilijke zaak. De stelling over de som van de hoeken van een driehoek is namelijk afhankelijk van het al dan niet gelden van het axioma over de evenwijdige lijnen van Euclides. Dit axioma zegt, dat gegeven een lijn en een punt dat niet op die lijn ligt, er precies één lijn door dat punt gaat die evenwijdig is aan de eerste lijn. Het standaardbewijs gebruikt zo'n lijn door de top van de driehoek evenwijdig aan de basis. Met het principe van "verwisselende binnenhoeken" volgt dan vrij eenvoudig de te bewijzen bewering.

Er zijn fraaie varianten en (schijn)bewijzen. Bijvoorbeeld kan je uitgaan van een betegeling van het vlak met allemaal onderling congruente driehoeken:



Een nog mooier schijnbewijs krijg je door onderstaande figuur van een vrij grote afstand te bekijken:



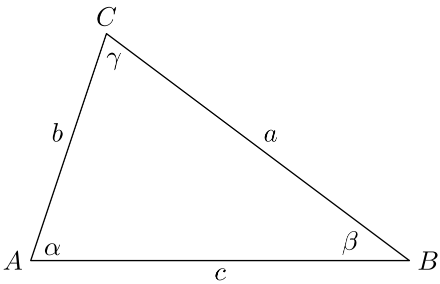
Het lijkt dan dat de drie gemerkte hoeken samen 2π zijn. De hoeken van het driehoekje zijn hier nevenhoeken van (dat wil zeggen, de aanvulling tot π). Alle 6 hoeken samen zijn dus $3 \cdot \pi$, en derhalve is de som van de hoeken van de driehoek $3\pi - 2\pi = \pi$.

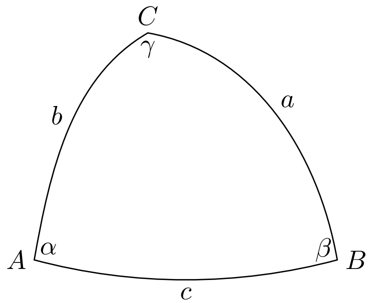
Boldriehoeksmeting

Voor het meten van onze Hoeken moeten we de oppervlakte van boldriehoeken berekenen. Zo'n boldriehoek heeft drie zijden, dat zijn bogen van cirkels op de bol. Verder hebben ze drie hoeken, dat zijn de hoeken tussen de raaklijnen in een hoekpunt aan de twee bogen door dat hoekpunt.

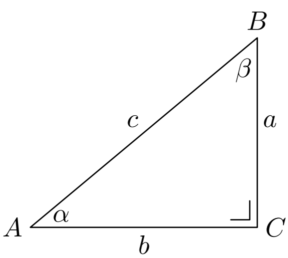
De hierboven aangegeven bewijzen voor de stelling over de som van de hoeken van een vlakke driehoek helpen niet direct. Uiteindelijk zijn we geïnteresseerd in de som van de Hoeken van een viervlak. Maar we gaan ons eerst bezig houden met de som van de hoeken van een boldriehoek. Zou er een verband tussen die twee problemen zijn?

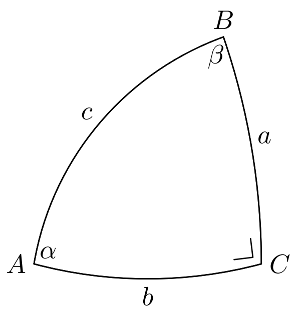
Voor het bestuderen van de som van de hoeken in een boldriehoek, werken de plaatjes met betegelingen of met evenwijdige lijnen niet zo goed. We gaan dus maar wat boldriehoeksmeting opzetten. Voor de aardigheid ontwikkelen we de vlakke-driehoeksmeting en de bol-driehoeksmeting naast elkaar.





We herinneren er nog even aan dat de zijden van een boldriehoek bogen van cirkels met straal 1 zijn. De lengte van zo'n boog is de grootte van de hoek met als hoekpunt het middelpunt van de bijbehorende cirkel, met de benen door de eindpunten van de boog. In het bijzonder kan je dus heel goed praten over de sinus enzovoort van een zijde van een boldriehoek. We beginnen met een paar elementaire formules voor rechthoekige driehoeken.

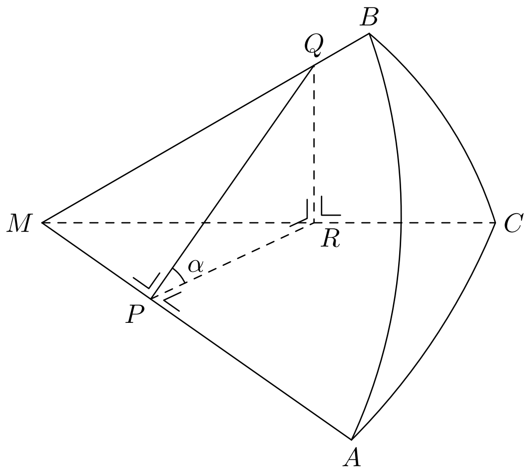




In zo'n rechthoekige (bol-)driehoek geldt:

$$
\begin{array}{rlcl}
\alpha + \beta = \pi/2; & & & - \\
a = c\,\sin\alpha; & & & \sin a = \sin c\,\sin\alpha; \\
b = c\,\cos\alpha; & & & \sin b = (\sin c/\cos a)\cos\alpha; \\
a^2 + b^2 = c^2; & & & \cos a\,\cos b = \cos c.
\end{array}
$$

Voor het geval van de boldriehoek geven we nu eerst een bewijs voor deze uitspraken. De boldriehoek hoort bij een Hoek M van een viervlak $MPRQ$. Dit viervlak kan zo gekozen worden, dat $\angle MPQ = \angle MRQ = \pi/2$.



Merk op, dat $\angle BMC = a$, $\angle CMA = b$ en $\angle AMB = c$. Omdat we een rechthoekige boldriehoek hebben, is $\angle PRQ = \pi/2$. Tenslotte is de raaklijn in A aan de boog AB evenwijdig met PQ en evenzo de raaklijn in A aan de boog AC evenwijdig met PR. Dus $\angle QPR = \alpha$.

Nu gaan we naar een aantal rechthoekige driehoeken kijken. Ten eerste zien we in driehoek MPQ dat $PQ = MQ \sin c$. Evenzo volgt met driehoek MRQ, dat $QR = MQ \sin a$. Deze QR is ook nog met behulp van driehoek PRQ anders te schrijven, namelijk $QR = PQ \sin\alpha$. Combineren we deze formules, dan blijkt

$$MQ \sin a = PQ \sin\alpha = MQ \sin c \, \sin\alpha,$$

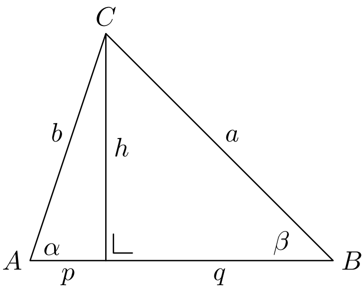
en hieruit volgt $\sin a = \sin c \, \sin\alpha$ hetgeen we wilden bewijzen.

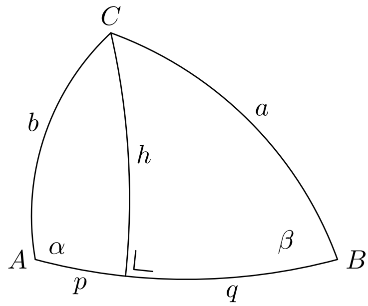
Voor de tweede formule beginnen we met de driehoeken MPR en MRQ. Daarmee zie je dat $PR = MR \sin b = MQ \cos a \, \sin b$. Op eenzelfde wijze blijkt met hulp van de driehoeken PRQ en MPQ dat $PR = PQ \cos\alpha = MQ \sin c \, \cos\alpha$. Voor de verhouding PR/MQ hebben we dan twee uitdrukkingen; als die vergeleken worden blijkt

$$\sin b = (\sin c / \cos a) \cos\alpha.$$

Tenslotte nog de gelijkheid $\cos a \cos b = \cos c$; deze volgt door twee uitdrukkingen voor MP af te leiden: de eerste met driehoek MPQ en de andere met achtereenvolgens de driehoeken MPR en MRQ. Hiermee is het bewijs van de stelling compleet.

We onderzoeken vervolgens, hoe de sinus– en de cosinusregel luiden voor een boldriehoek. Hiertoe zetten we de situatie voor een vlakke driehoek en die voor een boldriehoek weer naast elkaar.





$$\begin{aligned} h &= b\sin\alpha; \\ h &= a\sin\beta; \\ \frac{a}{\sin\alpha} &= \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sin h &= \sin b\,\sin\alpha; \\ \sin h &= \sin a\,\sin\beta; \\ \frac{\sin a}{\sin\alpha} &= \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}. \end{aligned}$$

Dat was de sinusregel; we gaan op eenzelfde manier verder met de cosinusregel.

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + q^2 \\ &= h^2 + (c-p)^2 \\ &= h^2 + p^2 + c^2 - 2cp \\ &= b^2 + c^2 - 2cp \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cos a &= \cos h\,\cos q \\ &= \cos h\,\cos(c-p) \\ &= \cos h\cdot(\cos c\,\cos p + \sin c\,\sin p) \\ &= \cos b\,\cos c + \cos h\,\sin c\,\sin p \\ &= \cos b\,\cos c + \sin b\,\sin c\,\cos\alpha. \end{aligned}$$

Intermezzo 2

Zouden we boldriehoeksmeting gaan doen op een bol met heel grote straal in plaats van met straal 1, dan was het verschil tussen een niet zo grote boldriehoek en een vlakke driehoek haast niet meer te zien. In diezelfde situatie komen we, door op de bol met straal 1 uiterst kleine driehoekjes te bekijken. Kortom, voor een boldriehoek met kleine zijden moeten de formules bij benadering gelijk zijn aan de overeenkomstige formules voor een vlakke driehoek. We kijken even hoe dit in z'n werk gaat.

Uit de bekende limiet

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$$

volgt dat voor kleine hoeken h geldt

$$\sin h \approx h.$$

Hier lezen we het symbool '≈' als "ongeveer gelijk aan". Er blijkt dan verder, dat

$$\cos h = 1 - 2\sin^2(h/2) \approx 1 - 2\cdot(h/2)^2 = 1 - h^2/2$$

en

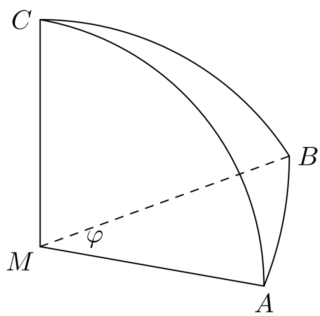
$$\tan h = \frac{\sin h}{\cos h} \approx h.$$

Met deze benaderingen kijken we bijvoorbeeld naar de boldriehoeksformule $\cos a \cos b = \cos c$ voor een driehoek met een rechte hoek. Deze is dan bij benadering $(1 - a^2/2)(1 - b^2/2) \approx (1 - c^2/2)$. Hieruit volgt dat $c^2 \approx a^2 + b^2 - a^2b^2/2$. Omdat a en b heel klein verondersteld worden, is de term $a^2b^2/2$ verwaarloosbaar, en zo vinden we voor een rechthoekige driehoek de stelling van Pythagoras terug!

Het is een aardige oefening, de andere formules op dezelfde manier te behandelen.

De oppervlakte van een boldriehoek.

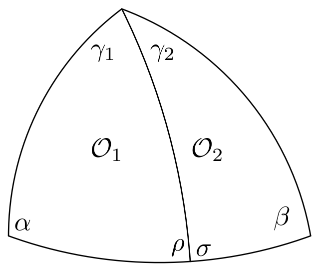
We beginnen met een heel eenvoudig type boldriehoek, namelijk eentje waarin twee zijden ieder lengte $\pi/2$ hebben. Schrijf φ voor de lengte van de resterende zijde. Met behulp van een plaatje is direct te zien, wat de oppervlakte van deze boldriehoek is.



Immers, de driehoek snijdt een $\varphi/(2\pi)$de deel van de bovenste helft van de bol uit. Die bovenste helft heeft oppervlakte 2π, dus boldriehoek ABC heeft oppervlakte $2\pi \cdot \varphi/(2\pi) = \varphi$.

Merk op, dat de som van de hoeken van driehoek ABC gelijk is aan $\pi/2 + \pi/2 + \varphi = \pi + \varphi$. Het overschot van de som van de hoeken boven π wordt het exces van de boldriehoek genoemd. We zien, dat voor de zeer speciale bovengenoemde driehoeken dit exces gelijk blijkt te zijn aan de oppervlakte.

Wanneer twee boldriehoeken een zijde met dezelfde lengte hebben, kunnen we ze aan elkaar plakken tot een nieuwe driehoek. Hiervan is de oppervlakte gelijk aan de som van de oppervlakten van de twee oorspronkelijke driehoeken. En evenzo is het exces van de nieuwe driehoek gelijk aan de som van de excessen van de twee oude. Dus geldt voor driehoeken die we uit stukjes van de boven ingevoerde speciale driehoeken kunnen samenstellen eveneens dat oppervlakte en exces gelijk zijn.

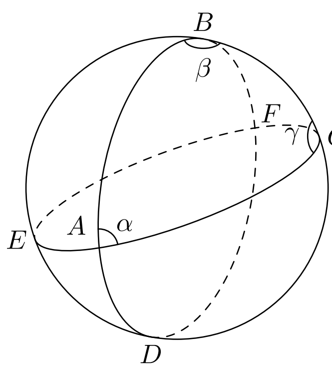


$$\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}; \qquad [\alpha + \beta + \gamma - \pi] = [\alpha + \gamma_1 + \rho - \pi] + [\beta + \gamma_2 + \sigma - \pi]\,.$$

Maar het is nog veel algemener het geval:

STELLING. *Voor een willekeurige boldriehoek is de oppervlakte gelijk aan het exces.*

We geven nu een bewijs voor deze uitspraak. Begin met een willekeurige boldriehoek ABC. De zijden hiervan zijn bogen op drie cirkels op de bol. Geef met D het diametrale punt van B aan, evenzo E het diametrale punt van C en F het diametrale punt van A.



De drie genoemde cirkels zijn dus $ABFD$, $ACFE$ en $BCDE$. Schrijf verder $\alpha := \angle BAC$, $\beta := \angle ABC$ en $\gamma := \angle ACB$.

De boltweehoek (zeg maar, de schil van een sinaasappelpartje) die je krijgt door de boldriehoeken ABC en BCF samen te nemen, levert je een $\alpha/(2\pi)$de deel van de bol. De oppervlakte van deze boltweehoek is dus $4\pi \cdot \alpha/(2\pi) = 2\alpha$ en de conclusie is

$$\mathrm{opp}(ABC) + \mathrm{opp}(BCF) = 2\alpha.$$

Op precies dezelfde wijze vinden we evenzo

$$\mathrm{opp}(BAC) + \mathrm{opp}(DAC) = 2\beta,$$
$$\mathrm{opp}(CAB) + \mathrm{opp}(EAB) = 2\gamma.$$

Op grond van symmetrie ten opzichte van het middelpunt van de bol (dus puntspiegelen in dat middelpunt) zie je direct dat bijvoorbeeld $\mathrm{opp}(FBC) =$

opp(ADE). Combineer nu de tot zover gevonden formules voor oppervlakten, dan staat er

$$2\alpha+2\beta+2\gamma = 2\text{opp}(ABC)+\text{opp}(ABC)+\text{opp}(ADE)+\text{opp}(ADC)+\text{opp}(EAB).$$

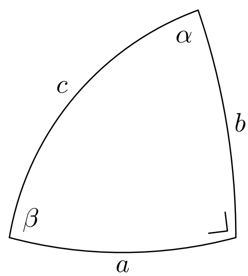
De laatste vier termen hierin leveren samen precies de oppervlakte van de "voorste helft" van de bol, dus 2π. Na nog de hele formule door 2 te delen staat er dan

$$\alpha+\beta+\gamma = \text{opp}(ABC)+\pi,$$

en dat is precies wat bewezen moest worden.

Voor een paar speciale types boldriehoeken leiden we ook een formule voor de oppervlakte in termen van de lengten van de zijden af.

Rechthoekige boldriehoeken. Voor een boldriehoek met $\gamma = \pi/2$ als hier getekend, geldt opp $= \alpha+\beta-\pi/2$.



Hieruit volgt

$$\begin{aligned}\sin(\text{opp}) &= \sin(\alpha+\beta-\pi/2) = -\cos(\alpha+\beta)\\ &= \sin\alpha\,\sin\beta - \cos\alpha\,\cos\beta\\ &= \frac{\sin a}{\sin c}\cdot\frac{\sin b}{\sin c} - \frac{\sin b}{\sin c}\cdot\frac{\sin a}{\sin c}\cos a\,\cos b\\ &= \sin a\,\sin b\cdot\frac{1-\cos c}{1-\cos^2 c},\end{aligned}$$

waarbij een paar eerder afgeleide formules voor het verband tussen hoeken en zijden in een rechthoekige boldriehoek zijn gebruikt. Er volgt dus voor onze driehoek dat

$$\sin(\text{opp}) = \frac{\sin a\,\sin b}{1+\cos c}.$$

Gelijkzijdige boldriehoeken. De bol-cosinusregel levert voor het geval van een gelijkzijdige boldriehoek met zijden a en hoeken α dat

$$\cos\alpha = \frac{\cos a}{1+\cos a}.$$

De oppervlakte is zoals voor alle driehoeken gelijk aan het exces, en dat is hier $3\alpha-\pi$. Voor de oppervlakte geldt daarom

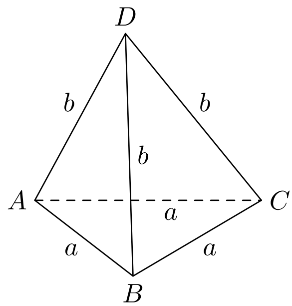
$$\cos(\text{opp}) = \cos(3\alpha-\pi) = -\cos(3\alpha).$$

We wensen een formule in termen van a en niet van α. Hiertoe drukken we $\cos(3\alpha)$ eerst uit in $\cos(\alpha)$ en vervolgens gebruiken we de regel die deze weer in $\cos a$ omschrijft. Het resultaat is

$$\cos(\text{opp}) = \frac{3\cos a + 6\cos^2 a - \cos^3 a}{(1+\cos a)^3}.$$

De som van de Hoeken van een viervlak

Met het tot dusver ontwikkelde materiaal keren we terug naar ons aanvankelijke probleem: hoe groot is de som van de Hoeken in een viervlak? We beginnen met een speciale klasse van viervlakken, namelijk de regelmatige driezijdige pyramiden.



Hierin is $AB = BC = CA = a$ en $AD = BD = CD = b$. Eerst gaan we onze intuïtie proberen te gebruiken. We houden a vast en stellen ons voor dat b (dus de hoogte van de pyramide) varieert. We beginnen dan met hoogte 0 (hetgeen zou corresponderen met $b = a\sqrt{3}/3$). Als b heel dicht bij die waarde ligt, dan zijn de drie Hoeken aan de basis vrijwel 0 geworden. De topHoek is daarentegen nagenoeg een halve bol, dus 2π. Voor dit soort regelmatige driezijdige pyramiden zal de som van de hoeken dus in de buurt van 2π liggen.

Nu het geval dat b heel groot is. Dan is de topHoek ongeveer 0. Voor een Hoek aan de basis staat de "verticale" ribbe ongeveer loodrecht op de beide horizontale, en die horizontalen hebben een onderlinge hoek ter grootte van $\pi/3$ (immers, de basis van de pyramide is een gelijkzijdige driehoek). Zoals we al eerder zagen, is de grootte van een dergelijke Hoek ongeveer $2\pi \cdot (\pi/3)/(2\pi) = \pi/3$. De som van alle hoeken van zo'n pyramide is dus ongeveer π.

Nu het geval van een regelmatig viervlak, dus $b = a$. Elke Hoek heeft dan als grootte de oppervlakte van een gelijkzijdige boldriehoek. De zijden hiervan zijn in ons geval gelijk aan $\pi/3$. De bol-cosinusregel geeft dan, zoals we al in het voorgaande zagen, dat de hoek α van deze boldriehoek voldoet aan

$$\cos\alpha = \cos(\pi/3)/(1+\cos(\pi/3)) = 1/3.$$

Het exces van onze gelijkzijdige boldriehoek is dus $3\arccos(1/3) - \pi$. Dit is dan tevens de oppervlakte, en dus de grootte van een Hoek. De conclusie is, dat voor een regelmatig viervlak de som van de Hoeken

$$12\arccos(1/3) - 4\pi \approx 2{,}20514\cdots$$

bedraagt. Dit is minder dan π. Je gaat dus vermoeden, dat wanneer we van een heel hoge naar een heel platte driezijdige pyramide gaan, eerst de Hoekensom afneemt, en dan later weer toeneemt.

Huiswerk voor de lezer:

- Is op dit traject de Hoekensom minimaal voor het regelmatige viervlak?

Intermezzo 3

We hebben weliswaar al een uitdrukking voor de som S van de Hoeken van het regelmatige viervlak afgeleid. Hier volgen een paar andere manieren om dit antwoord op te schrijven.

Uit de formule

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$$

volgt voor een hoek $\alpha = \arccos(1/3)$ dat

$$\cos(3\alpha) = 4/27 - 1 = -23/27.$$

De bestudeerde gelijkzijdige boldriehoek heeft als oppervlakte $\mathrm{opp} = 3\alpha - \pi$, dus we vinden

$$\cos(\mathrm{opp}) = -\cos(3\alpha) = 23/27.$$

Deze oppervlakte is gelijk aan een Hoek van het regelmatige viervlak, dus zo'n Hoek is

$$\arccos(23/27) \approx 0{,}55128\cdots.$$

Dit levert voor de som S van de Hoeken

$$S = 4\arccos(23/27).$$

Om nog een andere uitdrukking hiervoor te krijgen, gebruiken we

$$\cos 4\varphi = 2\cos^2(2\varphi) - 1 = 8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1.$$

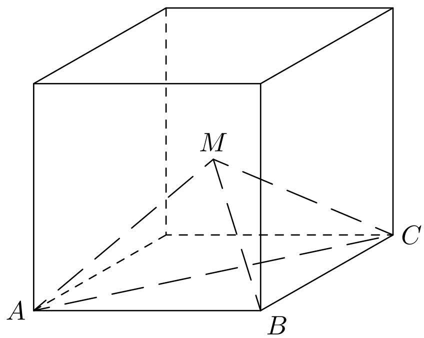
Dit geeft ins ons geval

$$\cos S = 8\cdot(23/27)^4 - 8\cdot(23/27)^2 + 1 = -314959/531441,$$

en daarmee

$$S = \arccos(-314959/531441).$$

We gaan verder met ons probleem, en bestuderen nog enkele andere speciale viervlakken. Daartoe beginnen we met een kubus met grondvlak $ABCD$. Het middelpunt van de kubus noemen we M, en we beschouwen het viervlak met grondvlak ABC en top M.



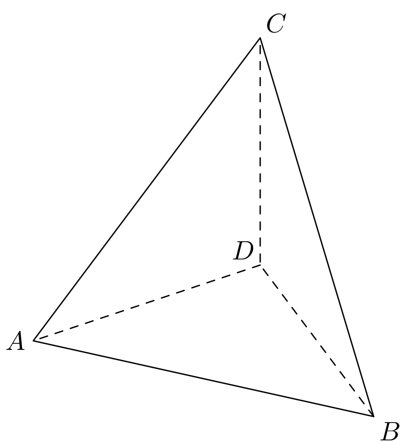
De hele kubus kunnen we precies opdelen in twaalf van deze viervlakken. Als we daarom alle Hoeken van al deze twaalf viervlakken optellen, vinden we de som van de acht Hoeken van de kubus plus in het middelpunt nog een volle Hoek (dus 4π). De Hoeken van de kubus zijn ieder $\pi/2$. De totale som van alle Hoeken van alle twaalf viervlakken is dus

$$4\pi + 8 \cdot \pi/2 = 8\pi.$$

De som van de Hoeken van viervlak $ABCM$ is hier een twaalfde deel van, dus $2\pi/3 \approx 2{,}09439\cdots$.

Dit is even schrikken; immers, het is minder dan de uitkomst bij een regelmatig viervlak. Laten we daarom nog een ander voorbeeld bezien.

Neem een gewone kamerhoek $ABCD$, met $\angle ADC = \angle ADB = \angle BDC = \pi/2$ en $AD = DC = BD$.



De Hoek bij D is dan $\pi/2$, en de andere drie Hoeken zijn gelijk. Bij zo'n ander Hoek hoort een rechthoekige boldriehoek waarvan de zijden gelijk zijn aan de hoeken $\angle CAD$, $\angle DAB$ en $\angle CAB$. Deze zijden zijn dus $\pi/4$, $\pi/4$ en $\pi/3$. Met onze formule voor de oppervlakte van een rechthoekige boldriehoek in termen van de zijden, volgt dat onze Hoek gelijk is aan

$$\arcsin\big(\sin^2(\pi/4)/(1+\cos(\pi/3))\big) = \arcsin(1/3).$$

De som van de hoeken van dit kamerhoek-viervlak is daarmee

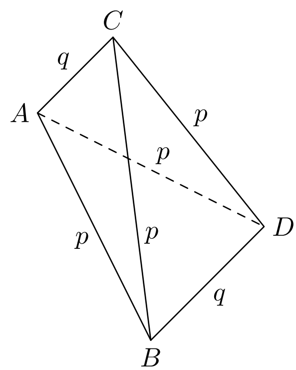
$$3 \arcsin(1/3) + \pi/2 \approx 2{,}5903 \cdots .$$

Dit is meer dan het tot nu toe gevonden minimum, en zelfs meer dan de uitkomst bij het regelmatige viervlak. Maar als we vervolgens onze kamerhoek spiegelen in het vlak DBC, dan vormen origineel en spiegelbeeld samen een nieuw viervlak. En voor dit viervlak is de som van de Hoeken gelijk aan tweemaal de som van de hoeken van origineel en spiegelbeeld, verminderd met de bijdragen bij D. Kortom, we krijgen een Hoekensom

$$6 \arcsin(1/3) + \pi - \pi \approx 2{,}03902 \cdots .$$

Dit is de laagste tot hiertoe gevonden som! Zou het nog kleiner kunnen worden?

De Hoekensom blijkt inderdaad nog kleiner te kunnen worden, en om dat in te zien volstaat het volgende voorbeeld. Neem een viervlak $ABCD$ met $AB = BC = CD = AD = p$ en $AC = BD = q$.

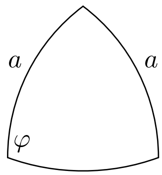


We houden in zo'n viervlak p vast en proberen q te variëren. Je ziet dan dat voor groter wordende q het viervlak steeds platter wordt. Dit blijft zo doorgaan tot het viervlak is ontaard in een plat figuur $ABCD$. Dit platte figuur is een vierkant; immers, het is een ruit, want de zijden hebben allemaal lengte p, en de beide diagonalen zijn even lang (lengte q). Voor dit vierkant geldt $q = p\sqrt{2}$. we zien dus, dat we alleen dan een viervlak krijgen, wanneer $0 < q < p\sqrt{2}$. Schrijf daarom $q/(2p) =: \lambda$; dan is $0 < \lambda < \sqrt{2}/2$, en al deze λ's horen bij zekere viervlakken.

We gaan nu de som van de hoeken in termen van λ bepalen. Hiervoor is het voldoende, één Hoek van zo'n viervlak te bepalen. Immers, de vier Hoeken zijn alle gelijk (ze zijn allemaal de topHoek van een pyramide met eenzelfde gelijkbenige basis en dezelfde ribben vanuit de top naar die basis). De boldriehoek die hoort bij een Hoek van ons viervlak, heeft twee zijden met lengte $a := \angle DAC = \angle BAC$ en een zijde met lengte $b := \angle DAB$. Met behulp van de gelijkbenige driehoek ACD zien we, dat $\cos a = q/(2p) = \lambda$. Evenzo levert driehoek ABD dat ook $\sin(b/2) = \lambda$. Omdat $\cos a = \lambda$, volgt verder dat $\sin a = \sqrt{1 - \lambda^2}$. Evenzo geldt vanwege $\sin(b/2) = \lambda$, dat $\cos(b/2) = \sqrt{1 - \lambda^2}$

en dus $\sin b = 2\sin(b/2)\cos(b/2) = 2\lambda\sqrt{1\lambda^2}$. Tenslotte is $\cos^2 b = 1 - \sin^2 b = 1 - 4\lambda^2(1-\lambda^2) = (2\lambda^2-1)^2$, dus, omdat $\cos b > 0$ en $0 < \lambda < \sqrt{2}/2$, levert dit $\cos b = 1 - 2\lambda^2$.

In onze boldriehoek noemen we de hoek waar twee zijden met lengte a samenkomen, ψ en een andere hoek φ.



De bol-cosinusregel levert de formules

$$\lambda = \lambda(1-2\lambda^2) + \sqrt{1-\lambda^2}\cdot 2\lambda\sqrt{1-\lambda^2}\cos\varphi,$$

waaruit volgt $\cos\varphi = \lambda^2/(1-\lambda^2)$, en verder

$$\cos b = \cos^2 a + \sin^2 a \cos\psi,$$

dus $\cos\psi = (1-3\lambda^2)/(1-\lambda^2)$.

Hiermee hebben we de hoeken van de boldriehoek bepaald. De oppervlakte is het exces, en dat bedraagt

$$\arccos\big((1-3\lambda^2)/(1-\lambda^2)\big) + 2\arccos\big(\lambda^2/(1-\lambda^2)\big) - \pi.$$

De Hoekensom van viervlak $ABCD$ is vier maal deze waarde, dus

$$4\arccos\big((1-3\lambda^2)/(1-\lambda^2)\big) + 8\arccos\big(\lambda^2/(1-\lambda^2)\big) - 4\pi.$$

Voor $\lambda \approx 0$ is dit ongeveer $4\arccos 1 + 8\arccos 0 - 4\pi = 0$. Evenzo is voor $\lambda \approx \sqrt{2}/2$, dus $\lambda^2 \approx 1/2$, de Hoekensom ongeveer $4\arccos(-1) + 8\arccos 1 - 4\pi = 0$. Kortom, de Hoeken van ons viervlak kunnen we willekeurig klein maken!

De tot zover gevonden Hoekensom bleken we willekeurig dicht onder 2π te kunnen krijgen, en ook willekeurig dicht boven 0. Door viervlakken langzaam in elkaar over te deformeren, komen we hiermee tot de volgende conclusie.

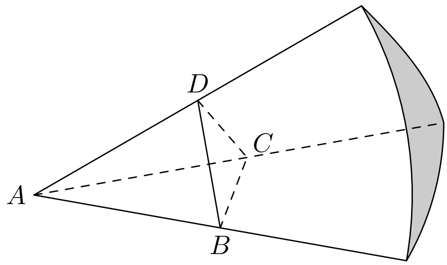
STELLING. *De Hoekensom van een viervlak kan iedere waarde tussen* 0 *en* 2π *hebben.*

(Zou de Hoekensom meer dan 2π kunnen zijn?)

Slotopmerking

Onder de standhoek tussen twee niet evenwijdige vlakken in de ruimte verstaan we de hoek tussen twee snijdende lijnen in deze vlakken, die beide loodrecht op de snijlijn staan. De standhoek van twee loodrecht op elkaar staande vlakken is dus $\pi/2$.

Bij een boldriehoek is de hoek tussen twee zijden gelijk aan de standhoek op de ribbe, die naar het betreffende hoekpunt van de boldriehoek gaat.



De Hoek bij het hoekpunt A is gelijk aan het exces van de bijbehorende boldriehoek. Dit exces is de som van de hoeken van de boldriehoek verminderd met π, en zoals we zojuist zagen is dit ook de som van de standhoeken op de betreffende drie ribben. Het optellen van de vier Hoeken leidt daarom tot het volgende resultaat.

STELLING. *De Hoekensom van een viervlak is twee maal de som van de standhoeken op de zes ribben, verminderd met* 4π.

Voor het regelmatige viervlak is eenvoudig in te zien dat de standhoek op elke ribbe gelijk is aan $\arccos(1/3)$. Hiermee vinden we dus opnieuw de Hoekensom van een regelmatig viervlak.

Voor de liefhebber

Wie zelf nog meer onderzoek wil doen aan Hoekensommen of aan (varianten van) de technieken die hier aan de orde kwamen, kan misschien putten uit het volgende.

- Wat is te zeggen over de Hoekensom van veelvlakken met meer dan vier vlakken?
- Bereken de Hoekensom van de regelmatige veelvlakken. Het viervlak en het zesvlak kwamen hier al aan de orde; hoe zit het met het acht–, het twaalf– en het twintig-vlak?
- In een vlakke driehoek kan een cirkel beschreven worden. De oppervlakte van de driehoek is het produkt van de straal van deze cirkel en de halve omtrek van de driehoek. Is er iets analoogs voor een boldriehoek?
- In een vlakke driehoek geldt bij de sinus-regel de extra gelijkheid
$$a/\sin\alpha = b/\sin\beta = c/\sin\gamma = 2R,$$
waarbij R de straal van de omgeschreven cirkel an de driehoek is. Is er een analogon voor de boldriehoek?
- Onderzoek voor de boldriehoek de analoga van klassieke stellingen over de hoogtelijnen, zwaartelijnen en hoekdeellijnen van een driehoek.

Tenslotte nog een paar heel andere vragen.

- Een ruimtelijke veelhoek noemen we halfregelmatig als alle hoeken onderling gelijk zijn en evenzo alle ribben. Welke halfregelmatige ruimtelijke n-hoeken bestaan voor $n = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$?

- Een ruimtelijke veelhoek $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$ noemen we regelmatig als $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n \cong A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_nA_1 \cong A_3A_4 \ldots A_nA_1A_2 \cong \cdots$ Welke regelmatige ruimtelijke n-hoeken bestaan er?

Het antwoord op deze laatste twee vragen kan de lezer vinden in de tweede referentie hieronder.

Literatuur

1. A.G. van Asch, F. van der Blij, *Hoeken en hun maat*, Amsterdam: CWI syllabus 29, 1992.
2. F. van der Blij, *Regular Polygons in Euclidean Space*, Linear Algebra and its Applications **226/228** (1995), 345–352.
2. George Gamov, *Meneer Tompkins en het kloppende heelal*, vertaling door Govert Schilling, Aad Janssen en Klaas Schonenberg, Amsterdam: Annex, 1991.
3. J. van den Brink, *Bolmeetkunde (informatieboek)*, Utrecht: Freudenthal Instituut.