Hoofdstuk III

Wat is een optie waard?

Herold Dehling

1. Inleiding

In het najaar van 1997 werd de Nobelprijs voor Economie uitgereikt aan de Amerikaanse hoogleraren Robert C. Merton en Myron S. Scholes voor hun baanbrekend werk op het gebied van de waardering van opties. Als derde naam hoort hier nog die van Fischer Black bij, maar hij overleed helaas twee jaar eerder. Hoogtepunt van hun theorie is de befaamde Black-Scholes(-Merton) formule voor de waarde van een Europese call optie op een aandeel,

$$
\begin{aligned}
f(t,s) = {} & s\Phi\left(\frac{\log(s/K)+(r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\\
& - Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{\log(s/K)+(r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right),
\end{aligned} \tag{1}
$$

waarbij $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2} ds$ de Gaussische errorfunctie is. We zullen op dit moment nog niet uitleggen wat de andere symbolen in bovenstaande formule betekenen maar dat zal gaandeweg duidelijk worden.

Als de lezer nu dit artikel terzijde legt in de verwachting deze gruwelijke formule toch nooit te zullen begrijpen, dan is dat zeer te betreuren. We willen namelijk hier juist een elementaire inleiding in de theorie van de Black-Scholes-Merton formule geven. Het zal blijken dat we uitgaande van een eenvoudige gedachte de essentie van de theorie van optieprijzen kunnen ontwikkelen. Aan het einde zullen we bij de Black-Scholes formule aankomen, en dan zal hopelijk iedere lezer zeggen: hè, dat is best te snappen. Ondertussen zullen we op dwarsverbindingen met allerlei geavanceerde wiskundige onderwerpen wijzen, zoals partiële differentiaalvergelijkingen, de martingaaltheorie en stochastische differentiaalvergelijkingen.

2. Opties

Een optie is een contract tussen twee partijen: de verkoper/uitgever en de koper/houder van de optie. De optie geeft de houder het recht om op, respectievelijk vóór een gegeven datum een bepaalde hoeveelheid van een goed tegen een van te voren vastgelegde prijs van de uitgever te kopen (een call optie) of

Robert C. Merton

Myron S. Scholes

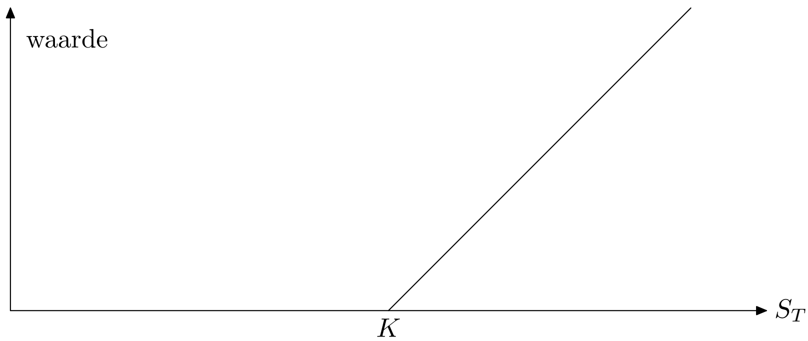
aan de uitgever te verkopen (een put optie). Het eenvoudigste voorbeeld is een Europese call optie op een bepaald aandeel, zeg een aandeel Koninklijke Olie. Bij deze optie is vastgelegd de zogenaamde *strike prijs* K en een uitoefendatum T. Op het tijdstip T mag de houder van de optie dan voor een bedrag K één aandeel Koninklijke Olie van de uitgever kopen. Evenzo bestaan er Europese put opties, waarbij de houder op een zekere datum één aandeel tegen een vastgelegde prijs aan de uitgever verkopen mag.

Bij Amerikaanse opties mag de houder zijn in de optie vastgelegd recht gedurende de hele periode tot het verval van de optie uitoefenen. Op de Nederlandse optiemarkt zijn de opties op aandelen Amerikaanse opties, en die op indices Europese. Wij zullen ons in het vervolg helemaal op Europese opties concentreren, vooral omdat ze technisch eenvoudiger zijn.

Sinds de introductie ervan in het jaar 1973 heeft de handel in opties een hoge vlucht genomen. Tegenwoordig wordt veel meer in opties dan in de onderliggende aandelen gehandeld. Opties worden om uiteenlopende redenen gekocht. Een groep kopers gebruikt opties om zich in te dekken tegen marktrisico's. Wie bijvoorbeeld over een aantal maanden een zekere hoeveelheid dollars nodig heeft, kan call opties op dollars aanschaffen en zo het risico van een koersstijging van de dollar afkopen. Een tweede groep kopers van opties is speculatief bezig en geïnteresseerd in het feit dat je bij opties met een relatief kleine inzet grote winsten kunt maken - bijvoorbeeld met een call optie als de aandelenkoers behoorlijk stijgt. Hier staat natuurlijk tegenover dat je een groot risico loopt dat de optie volledig waardeloos wordt als de aandelenkoers onder de uitoefenprijs daalt. Veel sterker dan bij beleggingen in aandelen loop je dus bij beleggingen in opties een fors risico om je hele inleg kwijt te raken.

Iedere optie geeft de houder een recht maar geen verplichting. Omgekeerd legt het aan de uitgever een verplichting op waar geen recht tegenover staat. Het ligt dus voor de hand dat de koper van een optie daarvoor een zeker bedrag zal moeten betalen. Maar wat zou een redelijke prijs zijn? Met precies deze vraag hebben Black, Scholes en Merton zich bezig gehouden.

De waarde van een Europese call optie valt vrij gemakkelijk te bepalen op de uitoefendag T. Als we de waarde van het aandeel op tijdstip t noteren met S_t, dan bestaan er op de uitoefendag twee mogelijkheden, namelijk $S_T \leq K$ of $S_T > K$. In het eerste geval is op het uitoefentijdstip de prijs van het aandeel op de beurs kleiner dan de strike prijs en dus zou de houder wel gek zijn om zijn optie uit te oefenen. Daarmee wordt in dat geval de waarde van de optie 0.



FIGUUR 1. Waarde van een Europese call optie op het uitoefentijdstip

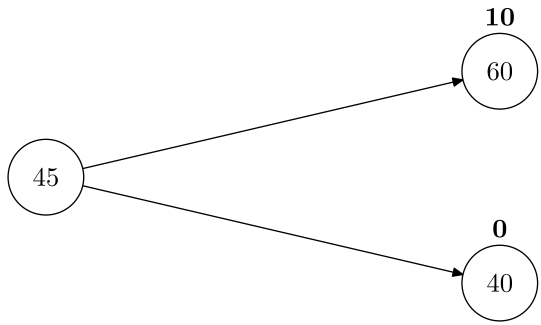
In het tweede geval is het verstandig om de optie uit te oefenen. De houder van de optie zal dus voor het bedrag K het aandeel kopen. Omdat hij dit aandeel direkt weer voor S_T op de beurs verkopen kan, kan hij een winst van $S_T - K$ realiseren, en dat is de waarde van de optie op dag T. Samengevat levert dit de functie $(S_T - K)^+ := \max(0, S_T - K)$ voor de waarde van een Europese call optie op het uitoefentijdstip T (zie figuur 1).

Een Europese call optie is een bijzonder geval van een zogenaamde contingente claim: de waarde van de optie is afhankelijk van de ontwikkeling van de waarde van een ander handelsobject. Algemeen wordt een contingente claim beschreven door een functie $f_T(s)$ welke aangeeft wat de waarde van de claim op tijdstip T is als het aandeel de koers s heeft. Een Europese call optie met strike prijs K is gekarakteriseerd door $f_T(s) = (s - K)^+$, en is in feite volledig gelijkwaardig met de toezegging van de uitgever om aan de houder op tijdstip T het bedrag $f_T(s)$ uit te keren. De essentiële vraag van de optietheorie is: wat is de waarde van een contingente claim op een willekeurig tijdstip $t < T$?

3. Binair één-periode model: een getallenvoorbeeld

Zoals vaak bij grote wetenschappelijke ontdekkingen, zit ook bij de Black-Scholes-Merton theorie de essentie in een heel eenvoudige gedachte - je moet er alleen maar op komen! Deze gedachte valt reeds bij een heel simpel model voor de ontwikkeling van aandelenprijzen in een gegeven periode uit te leggen. En om de zaak nog eenvoudiger te maken, beginnen we met een getallenvoorbeeld.

We bekijken een periode van lengte 1, tussen tijdstippen $t = 0$ en $t = 1$. Stel dat de waarde van een aandeel aan het begin van de periode €45 is, en dat er slechts twee scenario's tussen nu en het einde van de periode kunnen optreden, namelijk dat de prijs daalt naar €40 of dat de prijs stijgt naar €60. Gegeven zij verder een Europese call optie met strike prijs $K = 50$. We hebben eerder gezien dat de waarde van deze optie aan het einde van de periode, dus op het tijdstip $t = 1$, gelijk aan 0 of 10 is, afhankelijk ervan of de aandelenkoers naar €40 daalt of naar €60 stijgt. Maar wat is de waarde van de optie nu, dat wil zeggen op tijdstip $t = 0$?



Figuur 2. Voorbeeld van een één-periode binair model.

We redeneren even vanuit de optiek van de uitgever van de optie. Hij is door de verkoop van de optie een verplichting aangegaan en moet om aan zijn verplichting te kunnen voldoen aan het einde van de periode het bedrag 0 of €10 ter beschikking hebben, afhankelijk van de ontwikkeling van de aandelenkoers. De essentiële gedachte achter de theorie van Black, Scholes en Merton bestaat erin om aan het begin van de periode een portfolio samen te stellen waarvan de waarde aan het einde van de periode gelijk aan de waarde van de optie zal zijn, ongeacht de koersontwikkeling van het aandeel. Als de uitgever van de optie in zo'n portfolio belegt, heeft hij aan het einde van de periode precies de nodige hoeveelheid geld beschikbaar om de houder van de optie tevreden te stellen. Men zegt dat dit portfolio de optie dupliceert, en noemt het geheel een hedging strategy. Door aanschaf van zo'n duplicerend portfolio dekt de uitgever van de optie zich in tegen het risico van de aangegane verplichting. Aan de aanschaf van dit portfolio zijn voor de uitgever kosten verbonden - en dat is precies de waarde van de optie.

In onze eenvoudige situatie kan de uitgever slechts in aandelen of in geld beleggen. Om de zaak nog eenvoudiger te maken, nemen we aan dat de rente op geldleningen en op spaarrekeningen 0 is - het geval van positieve rente is niet echt anders, maar zorgt wel voor lastiger formules. Voor een beleggingsstrategie moet de uitgever van de optie dus kiezen voor het aantal aandelen (x) dat hij houden wil en voor de hoeveelheid geld (y) die hij op zijn rekening houden wil. Dan is de waarde van het portfolio aan het einde van de periode in het geval van een dalende koers gelijk aan $40x + y$, en in het andere geval $60x + y$. Voor een duplicatie van de optie moeten deze waarden gelijk zijn aan 0, respectievelijk €10, en dat leidt tot het volgende systeem van 2 lineaire vergelijkingen met 2 onbekenden:

$$60x + y = 10$$
$$40x + y = 0.$$

De unieke oplossing van dit systeem is $x = 1/2$ en $y = -20$. De beleggingsstrategie van de uitgever van de optie bestaat hierin dat hij een half aandeel koopt en €20 leent. Ongeacht de koersontwikkeling van het aandeel, heeft dit portfolio aan het einde van de periode de waarde van de optie: in het geval van een stijgende koers heeft het aandeel de waarde €30, daarvan zijn €20 nodig om de lening af te lossen en blijven €10 over om de houder van de optie tevreden te stellen. In het geval van een dalende koers, heeft het aandeel de waarde €20, dit hele bedrag wordt gebruikt ter aflossing van de lening en vervolgens blijft niets over, maar dat hoeft ook niet omdat de optie nu de waarde 0 heeft. De hier beschreven strategie kost in het begin geld: de uitgever koopt een half aandeel voor de prijs van €22,5 en leent €20 bij de bank. Hij heeft dus nog €2,5 extra nodig, en dit bedrag zal hij van de koper vragen.

Waarom zal op de markt voor opties alleen de hier berekende prijs gelden, en geen andere? Dit heeft te maken met het idee dat er op een perfekte markt geen *arbitrage* gelegenheid mag bestaan, dat wil zeggen een gelegenheid om zonder risico geld te verdienen - anders zou namelijk iedereen dit doen en dat zou de mogelijkheid om zeep helpen. Afwijkingen van de optieprijs van de hier berekende 2,5 naar boven of beneden zullen een arbitrage mogelijkheid openen. Stel namelijk dat de prijs hoger is dan 2,5 - nu is het voordelig om opties uit te geven. Voor 2,5 koop je het portfolio dat de waarde van de optie perfect reproduceert en dan houd je nog geld over dat je in eigen zak kunt steken! Omgekeerd, als de prijs van de optie beneden 2,5 ligt, wordt het voordelig om opties te kopen. Je kunt dan namelijk precies het omgekeerde van de strategie van de uitgever doen, en een half aandeel verkopen en 20 op je bankrekening leggen - deze strategie levert je in het begin direkt 2,5 op, meer dan je voor de optie betaald hebt en dus hou je weer iets over. Aan het einde van de periode zijn je portfolio en de optie evenveel waard, dus daar hoef je geen geld voor te reserveren.

4. Binair één-periode model: algemene formules

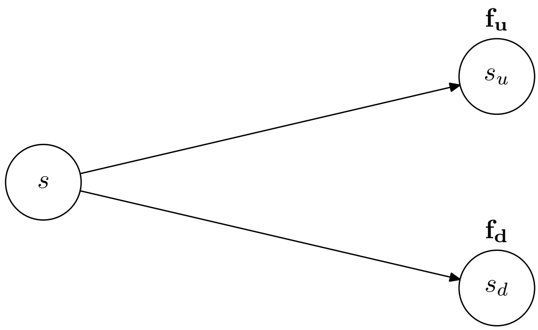
Wat we hier voor een getallenvoorbeeld gedaan hebben, zullen we nu voor een algemeen binair één-periode model uitwerken. Nog steeds gaan we ervan uit dat de rente op de geldmarkt 0 is. Deze aanname maakt bij een eerste behandeling de formules eenvoudiger. Aan de andere kant is het heel gemakkelijk om later naar het algemene geval over te gaan door alle prijzen met de marktrente af te prijzen.

We noteren met s de huidige prijs van het aandeel en met s_d en s_u de twee mogelijke prijzen aan het eind van de periode, waarbij $s_d < s_u$. Van deze prijzen mogen we verder aannemen dat

$$s_d < s < s_u,$$

want anders zou er weer een arbitragemogelijkheid bestaan. Stel namelijk dat s_d en s_u beide groter zijn dan s. Dan zou je altijd voordelig uit zijn door je geld in aandelen te beleggen. Een risicovrije strategie om geld te verdienen zou erin bestaan om geld bij de bank te lenen en dit in aandelen te beleggen.

We nemen verder aan dat we met een contingente claim te maken hebben die aan het einde van de periode de waarde f_d of f_u heeft, afhankelijk van de ontwikkeling van de prijs van het aandeel zelf (zie figuur 3). Deze claim kan



FIGUUR 3. Algemeen één-periode binair model.

het resultaat van een optie zijn, maar dat hoeft voor de verdere redeneringen niet.

We willen een beleggingsportfolio opzetten dat de claim dupliceert, ongeacht de waardeontwikkeling van het aandeel. Als we met x het aantal aandelen in dit portfolio noteren en met y de hoeveelheid contanten, dan komen we tot de twee vergelijkingen

$$\begin{aligned} s_d \cdot x + y &= f_d \\ s_u \cdot x + y &= f_u. \end{aligned}$$

Dit systeem heeft de oplossing

$$x = \frac{f_u - f_d}{s_u - s_d} \quad \text{en } y = f_u - s_u \frac{f_u - f_d}{s_u - s_d}.$$

De waarde f van dit portfolio op tijdstip 0 en dus, volgens de eerdere redeneringen, de huidige waarde van de contingente claim, is dan

$$\begin{aligned} f = s \cdot x + y &= s \cdot \frac{f_u - f_d}{s_u - s_d} + f_u - s_u \frac{f_u - f_d}{s_u - s_d} \\ &= \frac{s_u - s}{s_u - s_d} f_d + \frac{s - s_d}{s_u - s_d} f_u. \qquad (2) \end{aligned}$$

Met behulp van deze formule kunnen we nu de huidige waarde van iedere contingente claim in het binaire één-periode model berekenen.

Opmerkelijk is de soort relatie die door formule (2) uitgedrukt wordt. De huidige waarde van de optie is een gewogen gemiddelde van de toekomstige waarde met de gewichten

$$q = \frac{s_u - s}{s_u - s_d} \quad \text{en } q' = \frac{s - s_d}{s_u - s_d}.$$

Merk op dat $0 \leq q, q' \leq 1$ en dat $q + q' = 1$, oftewel $q' = 1 - q$. De gewichten q en $1 - q$ zijn dus net kansen en de formule (2) specificeert de huidige waarde van de claim als verwachte toekomstige waarde bij gebruik van deze kansen. Het zal duidelijk zijn dat het hier om technische kansen gaat die tenminste niet direct iets te maken hebben met kansverdelingen op de aandelenmarkt.

Desondanks maakt deze manier om de huidige waarde als verwachtingswaarde van toekomstige waarden uit te drukken het mogelijk om de rijke techniek van de kansrekening in het spel te brengen.

De gewichten q en $1-q$ hebben een bijzonder verband met de prijzen van het aandeel. Het blijkt namelijk dat

$$s = q \cdot s_d + (1-q) \cdot s_u,$$

dus de huidige koers van het aandeel is gelijk aan het met de gewichten q en $1-q$ gewogen gemiddelde van de koers aan het einde van de periode. Als we deze gewichten weer als kansen opvatten, dan betekent dit dat de huidige koers gelijk is aan de verwachtingswaarde van de koers aan het einde van deze periode. Een kansmodel met deze eigenschap noemen we in de kansrekening ook wel een *martingaal*. In termen van kansbomen is een martingaal een boom met dusdanige gewichten dat alle takken in balans zijn. Oorspronkelijk werden martingalen bestudeerd als modellen voor eerlijke spelen, dat wil zeggen spelen waarbij de verwachte uitkering in iedere ronde gelijk is aan de inzet. De daarbij ontwikkelde martingaal-theorie heeft inmiddels ingang gevonden in bijna alle deelgebieden van de kansrekening.

We kijken tenslotte nog even wat de algemene formule voor het konkrete getallenvoorbeeld van de vorige paragraaf oplevert. Om van de tak in figuur 2 een martingaal te maken, moeten de gewichten $q = 1/4$ en $1-q = 3/4$ zijn. De waarde van de optie aan het begin van de periode is de verwachting van de waarde aan het einde, met deze gewichten als kansen, en dus

$$f = \frac{1}{4}10 + \frac{3}{4}0 = 2{,}5$$

zoals we ook direkt al gevonden hadden.

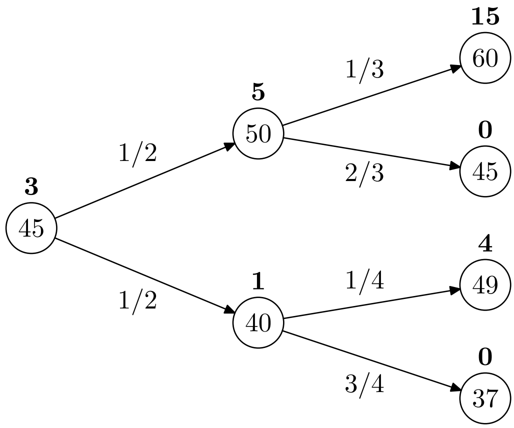
Nu hebben we in ieder geval een heel eenvoudige formule voor de waarde van een optie - maar hoe staat het met de bijbehorende hedging-strategie? Hier helpt de volgende gedachte: de waardeverandering Δf van het duplicerende portfolio in een periode kan alleen veroorzaakt worden door een verandering in de aandelenkoers - de waarde van de belegging in contanten blijft namelijk onveranderd. Als we x aandelen in ons portfolio hebben en de aandelenkoers verandert met Δs, dan verandert de waarde van het portfolio met $\Delta f = x \cdot \Delta s$. Hieruit volgt

$$x = \frac{\Delta f}{\Delta s}.$$

De hedging procedure die uit deze betrekking volgt wordt ook wel een Delta-hedge genoemd. We gaan dit nog even voor het voorbeeld uit de vorige paragraaf na. Hier is $\Delta f = 7{,}5$ en $\Delta s = 15$, en dus $x = \Delta f / \Delta s = 1/2$ - deze berekening hebben we langs de bovenste tak gedaan, maar de andere tak levert hetzelfde resultaat.

5. Algemene binaire boom-modellen

Het binaire één-periode model is natuurlijk geen realistisch model, zeker niet als het om een langere periode gaat. Maar we kunnen het wel gebruiken als bouwsteen voor binaire bomen, en met een voldoende fijnmazige boom komen we al dichter bij de werkelijkheid. Een binaire boom modelleert de aandelenkoers gedurende een aantal, zeg n, periodes. Binnen één periode is het model gewoon een binaire tak, dat wil zeggen dat er twee mogelijke ontwikkelingen van de aandelenkoers zijn (zie figuur 4 voor een twee-perioden boom).



Figuur 4. Voorbeeld van een twee-perioden binair model.

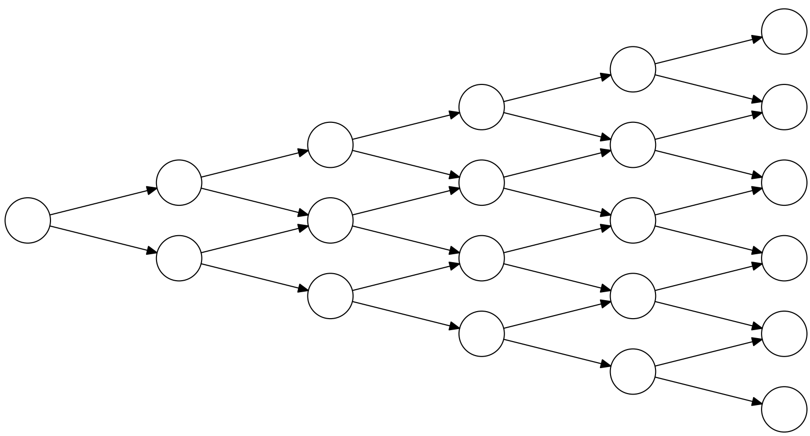
Met behulp van de technieken uit de vorige paragraaf kunnen we ook de waarde van een optie in een binaire boom bepalen. Om te beginnen, berekenen we de gewichten die van de boom een martingaal maken (zie figuur 4). Nu kunnen we de waarde van de optie op iedere plaats in de boom recursief berekenen, beginnend bij het uitoefentijdstip n. Het eindresultaat, de waarde van de optie op tijdstip $t = 0$, kunnen we ook direkt in één keer uitrekenen, namelijk als verwachte optiewaarde op tijdstip n waarbij de verwachtingen met betrekking tot de kansen langs de takken van de boom genomen worden. Konkreet betekent dit dat je ieder pad van $t = 0$ naar $t = n$ volgt en daaraan als kans het produkt van de gewichten langs dit pad toekent. Het met deze kansen gewogen gemiddelde van de mogelijke optiewaarden op tijdstip n is dan de beginwaarde van de optie.

In figuur 4 hebben we deze procedure voor een twee-perioden boom uitgewerkt. Omcirkeld vind je de aandelenprijzen van ons model. Vervolgens hebben we de martingaal-gewichten berekend. Als voorbeeld voor een contingente claim bestuderen we een Europese call optie met strike prijs $K = 45$, waarvan de waarde op tijdstip $t = 2$ gelijk is aan $(S_2 - 45)^+$. Deze getallen staan boven de cirkels. Van hieruit berekenen we dan recursief de optieprijzen in de voorafgaande tijdstippen.

De hedging strategie in dit voorbeeld kunnen we weer met de delta regel vinden. In de eerste periode is $x = (5-3)(50-45) = 2/5$ en dus $y = f - sx = 3 - 45 \cdot 2/5 = -15$. De strategie bestaat dus in het aanschaffen van 2/5-de aandeel en het lenen van €15. De strategie in de tweede periode hangt af van de koersontwikkeling in de eerste periode: als de koers naar €50 omhoog gegaan is, dan wordt $x = (15 - 5)/(60 - 50) = 1$ en $y = 5 - 50 = -45$, en in het andere geval, dus als de koers in de eerste periode omlaag gegaan is, wordt $x = 1/3$ en $y = -12\frac{1}{3}$. We zien hier dus dat het portfolio aan het einde van iedere periode aan de koersontwikkeling in de voorafgaande periode aangepast moet worden. Zoiets noemen we dan ook een dynamische hedging strategie.

6. Cox-Ross-Rubinstein binomiaal model

Een bijzonder geval van de binaire boom is een binomiale boom waarbij de stappen naar boven en beneden bij iedere tak volgens eenzelfde verhouding gaan. Dit model, in 1979 voorgesteld door Cox, Ross en Rubinstein, leent zich vooral voor de limietovergang als je de boom steeds fijner laat worden.



FIGUUR 5. Binomiale boom volgens het Cox-Ross-Rubinstein model.

In het binomiale model heb je in iedere periode twee mogelijkheden voor de ontwikkeling van de aandelenprijs: deze kan van s naar $s \cdot u$ stijgen of naar $s \cdot d$ dalen. De faktoren u en d zijn voor alle takken hetzelfde en voldoen aan $d < 1 < u$, want anders zou er een mogelijkheid voor arbitrage zijn. De boom die je op deze takken opbouwt recombineert, dat wil zeggen dat takken weer samenkomen, maar dat maakt voor de verdere analyse weinig uit (zie figuur 5).

Om de waarde van een optie in het binomiale model te kunnen berekenen, hebben we de gewichten q en $1-q$ nodig die van de boom een martingaal maken. Daarvoor moet $q \cdot s \cdot u + (1-q) \cdot s \cdot d = s$ gelden, oftewel $qu + (1-q)d = 1$. Dit heeft als oplossing

$$q = \frac{1-d}{u-d} \quad \text{en } 1 - q = \frac{u-1}{u-d}.$$

Merk op dat je overal in de boom dezelfde gewichten q en $1-q$ tegenkomt; dit wordt natuurlijk door de bijzondere structuur van de binomiale boom veroorzaakt. De waarde van een optie kan vervolgens recursief berekend worden, beginnend met de waarde $f_T(s)$ op het uitoefentijdstip T. Deze recursieve formule willen we nu iets nader bekijken.

Als we de waarde van de optie op tijdstip t bij een aandelenprijs s met $f(t,s)$ noteren, dan krijgen we de betrekking

$$f(t,s) = qf(t+1, s\cdot u) + (1-q)f(t+1, s\cdot d) \tag{3}$$

wat samen met de randvoorwaarde $f_T(s)$ de optieprijzen op alle tijdstippen vastlegt. We kunnen (3) ook herschrijven tot een differentievergelijking door van beide kanten $f(t+1,s)$ af te trekken:

$$f(t,s) - f(t+1,s) = qf(t+1, s\cdot u) - f(t+1,s) + (1-q)f(t+1, s\cdot d). \tag{4}$$

Merk op dat in het linker lid een differentie in de t-variabele staat en in het rechter lid een differentie in de s-variabele. De kenner ziet rechts bovendien een tweede orde differentie en voelt al aankomen dat we in een of andere limiet tot een tweede orde partiële differentiaalvergelijking zullen komen.

Zoals in de vorige paragraaf is uitgelegd, kunnen we ook in één keer een expliciete formule voor de waarde van een optie in een binair boom model geven. We noteren met n het aantal periodes. Bij het binomiale model kan de aandelenkoers aan het einde van periode n dan één van de waarden

$$s_k^{(n)} = s_0 u^k d^{n-k}$$

aannemen, waarbij s_0 de aandelenkoers op tijdstip $t=0$ is. Ieder pad van $(0, s_0)$ naar $(n, s_k^{(n)})$ gaat precies k keer omhoog en $n-k$ keer omlaag, en dus is het product van de gewichten langs zo'n pad gelijk aan $q^k(1-q)^{n-k}$. Verder zijn er precies $\binom{n}{k}$ paden van deze soort en dus wordt

$$f(0,s_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} f_T(s_0 u^k d^{n-k}). \tag{5}$$

Het scherpe oog van een kansrekenaar herkent in het rechter lid van (5) een verwachtingswaarde, namelijk van de functie $f_T(s_0 u^X d^{n-X})$ van een stochast X met een binomiale verdeling met parameters n en q. Met een paar transformaties kun je dit nog herschrijven tot

$$f(0,s_0) = E f_T\left(s_0 e^{\{(\log u - \log d)X + n\log d\}}\right). \tag{6}$$

Als je een benadering voor deze verwachtingswaarde zoekt, kun je de Centrale Limiet Stelling van DeMoivre te hulp roepen. Deze stelling leert dat een binomiale stochast met parameters n en q bij benadering normaal verdeeld is met verwachtingswaarde nq en variantie $nq(1-q)$ (afgekort $N(nq, nq(1-q))$-verdeling), tenminste als n groot is. De term in de exponent van (6)

$$Z = (\log u - \log d)X + n\log d$$

heeft dus bij benadering een

$$N(nq(\log u - \log d) + n\log d, (\log u - \log d)^2 nq(1-q))\text{-verdeling.}$$

In termen van deze stochast kan de optieprijs aan het begin dan geschreven worden als

$$Ef_T(s_0e^Z).$$

Als Z nu echt en niet slechts approximatief normaal verdeeld is, en je d en u nog goed kiest (daarover meer in de volgende paragraaf) dan kom je met enig rekenwerk aan de Black-Scholes formule (1) voor $t = 0$ en $r = 0$.

We hebben hier de wel eenvoudigste toegang tot de waardering van Europese opties laten zien. Ook in de praktijk gebruikt men veelal boommodellen, bijvoorbeeld om prijzen voor ingewikkelde opties numeriek te bepalen. In de volgende paragrafen zullen we de Black-Scholes formule op twee verdere manieren afleiden. Beide gebruiken geavanceerde wiskundige concepten, met name partiële en stochastische differentiaalvergelijkingen. We zullen proberen het een en ander op een zo gebruikersvriendelijk mogelijke wijze uit te leggen.

7. De Black-Scholes partiële differentiaalvergelijking

We komen tot een continu model voor de koersontwikkeling van een aandeel in het tijdsinterval $[0, T]$ door dit interval in steeds kleinere periodes van lengte Δt op te splitsen en zo een rij van binomiale bomen met steeds dichtere vertakkingen te construeren. Het continue model is de limiet van dit proces als we Δt naar 0 laten gaan. We maken ons hier nog niet druk over de vraag of, en in welke zin, deze limiet überhaupt bestaat - dat is namelijk een best moeilijk verhaal waarover we straks nog iets zullen vertellen.

Als we de periodes steeds korter laten worden, zullen we ook de groeifaktoren u en d moeten aanpassen. Als we deze constant laten, explodeert namelijk het hele prijsproces en daar komt geen zinnige limiet uit tevoorschijn. De prijsstappen zullen met Δt afnemen. Op welke manier u en d van Δt moeten afhangen, zullen we zo meteen zien. Wel zullen we het zo inrichten dat de gewichten q en $1 - q$ onveranderd blijven.

In de boom met periodelengte Δt en groeifactoren $u = u(\Delta t)$ en $d = d(\Delta t)$ geldt een differentievergelijking voor de optiewaarde die rechtstreeks uit (4) af te leiden valt:

$$(7)\quad f(t, s) - f(t + \Delta t) = qf(t + \Delta t, su) - f(t + \Delta t, s) + (1 - q)f(t + \Delta t, sd).$$

De functie $f(t, s)$ is natuurlijk slechts voor discrete t- en s-waarden gedefinieerd, namelijk voor $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots$ en voor $s = s_0d^iu^j$. Maar toch doen we net alsof we hier met een functie f te maken hebben die op het hele gebied $[0, T] \times [0, \infty)$ gedefinieerd is, en bovendien nog voldoende vaak differentieerbaar is.

Nu passen we in (7) rechts en links de volgende Taylor-benaderingen toe:

$$f(t + \Delta t, s) \approx f(t, s) + \Delta t \frac{\partial f}{\partial t}(t, s)$$

$$\begin{aligned} f(t + \Delta t, su) \approx{}& f(t + \Delta t, s) + s(u - 1)\frac{\partial f}{\partial s}(t + \Delta t, s) \\ &+ \frac{1}{2}s^2(u - 1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t + \Delta t, s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t+\Delta t, sd) \approx f(t+\Delta t, s) + s(d-1)\frac{\partial f}{\partial s}(t+\Delta t, s) \\ + \frac{1}{2}s^2(d-1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t+\Delta t, s) \end{aligned}$$

Zo komen we in het linker lid van (7) aan de benadering $\Delta t \frac{\partial f}{\partial t}(t, s)$. In het rechter lid krijgen we

$$\begin{aligned} & q\left(f(t+\Delta t, s) + s(u-1)\frac{\partial f}{\partial s}(t+\Delta t, s) + \frac{1}{2}s^2(u-1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t+\Delta t, s)\right) \\ & - f(t+\Delta t, s) \\ & + (1-q)\left(f(t+\Delta t, s) + s(d-1)\frac{\partial f}{\partial s}(t+\Delta t, s) + \frac{1}{2}s^2(d-1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t+\Delta t, s)\right) \\ & = (q-1+(1-q))f(t+\Delta t, s) + (qs(u-1)+(1-q)s(d-1))\frac{\partial f}{\partial s}(t+\Delta t, s) \\ & \qquad + \frac{s^2}{2}(q(u-1)^2+(1-q)(d-1)^2)\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t+\Delta t, s) \\ & = \frac{s^2}{2}(q(u-1)^2+(1-q)(d-1)^2)\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t+\Delta t, s) \end{aligned}$$

want $q(u-1)+(1-q)(d-1)=0$ volgens de formule voor q. Als we nu beide leden van (7) door Δt delen, dan krijgen we de partiële differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{s^2}{2}\left(\frac{q(u-1)^2+(1-q)(d-1)^2}{\Delta t}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \approx 0,$$

waarbij in de limiet voor $\Delta t \to 0$ het $\approx$ overgaat in een echt $=$-teken. Om hier echter een zinnige formule uit te krijgen, moet de term tussen de haakjes, dus $(q(u-1)^2+(1-q)(d-1)^2)/\Delta t$ constant zijn (of tenminste convergeren). Dit krijgen we voor elkaar door u en d op gepaste wijze van Δt te laten afhangen waarover zo meteen meer. Als we nu de zojuist voor constant verklaarde term tussen de haakjes met σ^2 afkorten, dan komen we bij de partiele differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}s^2\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = 0$$

terecht. Dit is het speciaal geval $r = 0$ van de befaamde Black-Scholes differentiaalvergelijking. Je kunt direct door substitutie nagaan dat (1) inderdaad een oplossing is van deze partiële differentiaalvergelijking, met randvoorwaarde $f_T(s) = (s-K)^+$.

Maar nu dan eindelijk de al twee keer aangekondigde discussie over de juiste manier om de factoren u en d van de periode-lengte Δt te laten afhangen. De keuze $d = 1 - a\sqrt{\Delta t}$ en $u = 1 + b\sqrt{\Delta t}$ maakt dat

$$\sigma^2 = (q(u-1)^2 + (1-q)(d-1)^2)/\Delta t = qb^2 + (1-q)a^2$$

inderdaad een constante wordt, dat wil zeggen niet van Δt afhangt. Let wel even op: de drie parameters a, b en q zijn niet onafhankelijk van elkaar, want

q is een functie van u en d, en dus van a en b. Precies zit de zaak als volgt in elkaar:

$$q = \frac{1-d}{u-d} = \frac{a\sqrt{\Delta t}}{(a+b)\sqrt{\Delta t}} = \frac{a}{a+b}.$$

en dus $1 - q = b/(a+b)$. Daarmee kunnen we nog σ^2 uitrekenen als functie van a en b:

$$\sigma^2 = qb^2 + (1-q)a^2 = \frac{ab^2}{a+b} + \frac{ba^2}{a+b} = \frac{ab}{a+b}(a+b) = ab.$$

Deze grootheid heet ook de volatiliteit van de aandelenprijs, en deze geeft grofweg weer hoe grillig de aandelenkoers in de tijd verloopt. Hoe groter a en b, hoe groter de bewegingen op de aandelenmarkt.

8. Continue limieten van binomiale bomen

We hebben tot nu toe in het vage gelaten hoe een continue limiet van binomiale bomen er eigenlijk uitziet. Dat precies te doen is ook best moeilijk en zeker buiten het bereik van dit stukje, maar een beetje intuïtieve voorstelling kunnen we toch proberen te kweken.

Discrete boom-modellen voor de aandelenkoers konden we beschrijven door de verzameling van alle mogelijke paden tussen $t = 0$ en $t = T$ aan te geven. Maar als we vervolgens Δt naar nul laten gaan, komt er geen zinnige limiet-verzameling tevoorschijn. Je kunt niet zomaar zeggen dat de ene functie wel een mogelijk pad is en de andere niet. De enige uitweg is om de kansrekening te hulp te roepen en de mogelijke paden door een kansverdeling op de ruimte van continue functies op $[0, T]$ te beschrijven.

Met de gedachte om een kansverdeling op een ruimte van functies te definiëren, zullen veel lezers eerst behoorlijk moeite hebben. Immers, wat moet je je daarbij voorstellen? Kansverdelingen op de reële rechte beschrijven we meestal door hun verdelingsfunctie of door hun dichtheid, maar hoe moet dat hier? Als we nu alvast een aantal keren random een functie volgens de verdeling konden trekken, dan hadden we al een idee van de verdeling. Maar hoe moet dat: een random functie trekken uit een verdeling die je niet eens fatsoenlijk beschrijven kunt. Hier helpt een analogie: stel je wordt gevraagd om een trekking uit een normale verdeling te simuleren en je hebt slechts een aantal munten ter beschikking. Dan herinner je je de Centrale Limiet Stelling, je gooit bijvoorbeeld 100 munten, en dan heb je bij benadering een trekking uit een normale verdeling als je het aantal keren kop bekijkt.

Iets dergelijks gaan we hier ook doen: we benaderen de kansverdeling op de ruimte van continue functies door een discrete approximatie. Deze approximatie krijg je door kansen aan de paden in een voldoende fijnmazig binomiale boom-model toe te kennen.

Praktisch kies je zo'n toevallig pad in een binomiaal bos door uitgaande van een beginwaarde s_0 om de Δt tijdseenheden of met een factor u omhoog te gaan of met een factor d omlaag, steeds afhankelijk van de uitkomst van een Kruis-Munt experiment. Met kans p ga je telkens omhoog en met kans $1 - p$

omlaag. Op deze manier krijg je een toevallig pad - zoiets noemt men in de kansrekening ook wel een stochastisch proces. Als je nu de parameters p, d en u op een geschikte manier van Δt laat afhangen, krijg je in een zekere zin een limiet voor $\Delta t \to 0$, de geometrische Brownse beweging. Het bestaan van dit limietprocess wordt door de zogenaamde functionale centrale limietstelling van Donsker gegarandeerd.

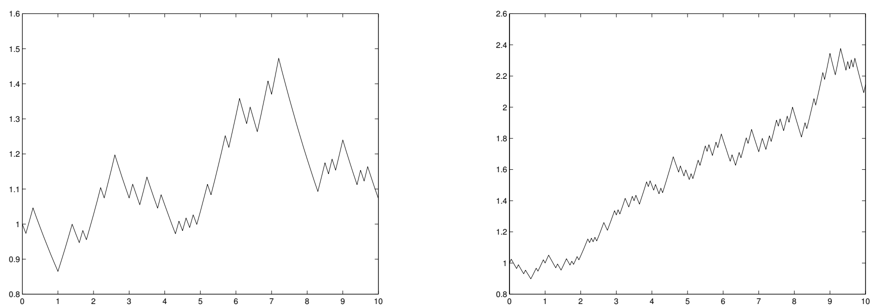
Dit verhaal willen we nog nader bekijken. Als t een veelvoud van Δt is en de aandelenkoers op tijdstip t met S_t genoteerd wordt, dan hebben we

$$S_{t+\Delta t} = S_t(1 + \xi_t) \tag{8}$$

waarbij ξ_t een stochast is met mogelijke waarden $u - 1$ en $d - 1$. We nemen in het vervolg aan dat deze ξ_t steeds dezelfde verdeling hebben, en dat ze allemaal onafhankelijk van elkaar zijn. We kunnen (8) herschrijven tot

$$\frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t} = \xi_t. \tag{9}$$

De grootheid in het linker lid is de *rate of return* van het aandeel - het winstpercentage in het interval $[t, t + \Delta t]$.



FIGUUR 6. Twee simulaties van discrete approximaties tot een geometrische Brownse beweging

Zoals gezegd, krijg je niet voor iedere keuze van p, u en d een zinnige limietverdeling uit het boven beschreven process. Als je de parameters niet op een heel speciale manier kiest, zal de boel bij wijze van spreken of exploderen of in mekaar storten. De juiste keuze krijg je door $E\xi_t = \mu\Delta t$ en $\mathrm{Var}\xi_t = \sigma^2\Delta t$ te nemen. Raar genoeg blijkt het voor het limietprocess niet uit te maken welke precieze verdeling ξ_t heeft - vandaar dat de eerder aangehaalde stelling van Donsker ook wel een invariantie-principe genoemd wordt. Je kunt dus ook normaal verdeelde ξ's nemen, met de bovenstaande parameters, of $\xi = \mu\Delta t + \sigma\Delta W(t)$, waarbij $\Delta W(t)$ een stochast met de $N(0, \Delta t)$-verdeling is. Zo zie je heel duidelijk hoe het model (9) in elkaar steekt - de rate of return in het interval $[t, t + \Delta t]$ heeft een deterministisch gedeelte $\mu\Delta t$ en een Gaussische random term $\sigma\Delta W(t)$.

De notatie $\Delta W(t)$ voor een $N(0, \Delta t)$-verdeelde stochast heeft een diepere betekenis want het gaat hier echt om de aangroeien van een bestaand proces, namelijk van de zogenaamde Brownse beweging. Een Brownse beweging is een continu stochastisch proces $\{W(t), t \geq 0\}$ dat voldoet aan de volgende eisen:

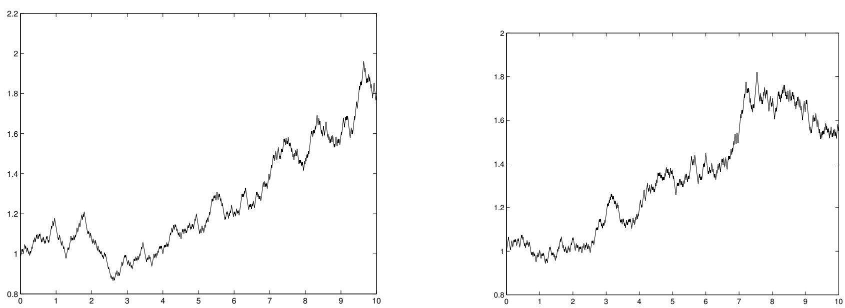
- Voor $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ zijn de aangroeiïngen $W(t_1) - W(t_0)$, $W(t_2) - W(t_1)$, $\ldots$, $W(t_n) - W(t_{n-1})$ onafhankelijk.
- $W(t + \Delta t) - W(t)$ heeft een $N(0, \Delta t)$-verdeling.

Een intuïtieve voorstelling van een Brownse beweging levert het beeld dat je je in het tijdsinterval tussen t en $t+\Delta t$ om een toevallige, $N(0, \Delta t)$-verdeelde grootheid verplaatst. Net als de geometrische Brownse beweging kun je ook de gewone Brownse beweging door een discretisatieproces benaderen, maar nu door optelling in plaats van vermenigvuldiging van onafhankelijke stochasten.

In de limiet voor $\Delta t \to 0$ wordt (9) formeel een zogenaamde stochastische differentiaalvergelijking,

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW(t). \tag{10}$$

Het blijkt nu dat je aan deze stochastische differentiaalvergelijking daadwerkelijk betekenis toekennen kunt, dat deze een eenduidige oplossing heeft die gelijk is aan de eerder door approximatie geïntroduceerde geometrische Brownse beweging.



FIGUUR 7. Twee simulaties van een geometrische Brownse beweging

Zonder de bijdrage $\sigma dW(t)$ in het rechter lid is (10) een gewone differentiaalvergelijking, namelijk $dS_t/dt = \mu S_t$. Deze vergelijking beschrijft de groei van het kapitaal op een spaarrekening met continue rentebijschrijving en vaste rente μ. De oplossing is de exponentiële groeifunctie $S_t = s_0 e^{\mu t}$ met s_0 het beginkapitaal op tijdstip $t = 0$. Door toevoeging van de term $\sigma dW(t)$ krijgen we een model voor groei van kapitaal op een aandelenmarkt waar je als het ware een van het toeval afhankelijke rente ontvangt.

De geometrische Brownse beweging is het meest populaire model voor aandelenprijzen. Hoe waardeer je binnen dit model nu opties? Daartoe kies je een

μ zodat het aandelenkoersproces een martingaal wordt - dat blijkt hier $\mu = 0$ te zijn - en dan bereken je

$$Ef_T(S_T). \tag{11}$$

(Als het rentepercentage bij de bank niet 0 is, maar een algemene waarde $r \geq 0$ heeft, dan moet je μ zo kiezen dat het verdisconteerde prijsproces $e^{-t}S_t$ een martingaal wordt - dat levert $\mu = r$ op - en dan met dit proces de bovenstaande verwachting berekenen.) De prijsformule (11) is het continue analogon van (5). Hoewel (5) conceptueel veel gemakkelijker is, omdat je slechts met discrete processen te maken hebt, leent (11) zich beter voor analytische berekeningen. Vergelijk het een beetje met de stap van sommen naar integralen - conceptueel zijn sommen veel gemakkelijker uit te leggen, maar voor analytische berekeningen werk je toch liever met integralen.

Wil je nu tenslotte de verwachtingswaarde in (11) daadwerkelijk uitrekenen, dan heb je de verdeling van S_T nodig. Die kun je heel deftig afleiden met behulp van de zogenaamde Itô-formule of op een boerenmanier, via de approximatie van S_t volgens (9):

$$\begin{aligned} S_t = s_0 \prod_{k=1}^{t/\Delta t} (1 + \xi_{k\cdot\Delta t}) &= s_0 \exp\left(\sum_{k=1}^{t/\Delta t} \log(1 + \xi_{k\cdot\Delta t})\right) \\ &\approx s_0 \exp\left(\sum_{k=1}^{t/\Delta t} \xi_{k\cdot\Delta t} - \frac{1}{2}(\xi_{k\cdot\Delta t})^2\right) \end{aligned}$$

waar de Taylor-benadering $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2}$ is toegepast. In de exponent staat een som van onafhankelijke stochasten, en met veel vertrouwen in de Centrale Limiet Stelling willen we wel geloven dat deze in de limiet, dus als $\Delta t \to 0$, normaal verdeeld wordt. De parameters van de normale limietverdeling zijn de limieten van verwachtingswaarde en variantie van de term in de exponent. Om deze te berekenen merken we op dat

$$\begin{aligned} E\left(\xi_{k\cdot\Delta t} - \frac{1}{2}(\xi_{k\cdot\Delta t})^2\right) &= E\xi_{k\cdot\Delta t} - \frac{1}{2}\left(\mathrm{Var}\xi_{k\cdot\Delta t} + (E\xi_{k\cdot\Delta t})^2\right) \\ &= \mu\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t - \frac{1}{2}(\mu\Delta t)^2 \end{aligned}$$

en dus

$$\lim_{\Delta t \to 0} E\{\sum_{k=1}^{t/\Delta t}(\xi_{k\cdot\Delta t} - \frac{1}{2}(\xi_{k\cdot\Delta t})^2)\} = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t.$$

Voorzover het om de variantie van de term in de exponent gaat, leert enig rekenwerk dat

$$\mathrm{Var}(\xi_{k\cdot\Delta t} - \frac{1}{2}(\xi_{k\cdot\Delta t})^2) \approx \mathrm{Var}(\xi_{k\cdot\Delta t})$$

en dus dat

$$\lim_{\Delta t \to 0} \mathrm{Var}\{\sum_{k=1}^{t/\Delta t} (\xi_{k \cdot \Delta t} - \frac{1}{2}(\xi_{k \cdot \Delta t})^2)\} = \sigma^2 t.$$

Einde van het verhaal is dus dat in de limiet, als alle $\approx$ overgaan in $=$ de aandelenkoers op tijdstip t geschreven kan worden als

$$S_t = s_0 \exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)).$$

De verdeling van een stochast waarvan het logaritme normaal verdeeld is, heet ook een *log-normale* verdeling - en dat is dus de verdeling van de aandelenkoersen bij het model van een geometrische Brownse beweging. Als je nu de verwachtingswaarde in (11) uitrekent, dan kom je weer bij de Black-Scholes formule terecht.

Literatuur

1. L.A. Ankum, A.G.Z. Kemna, *Inleiding in de optietheorie*, Schoonhoven: Academic Service.
2. F. Black, M. Scholes, *The pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy **81** (1973), 637–659.
3. J.C. Cox, S.A. Ross, M. Rubinstein, *Option Pricing: A Simplified Approach*, Journal of Financial Economics **7** (1979), 229–263.
4. J.C. Hull, *Options, Futures and Other Derivatives*, Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall International, 1997.