

## Hoofdstuk VI

# Het idee van Fourier

Gerton Lunter en Bruno van Wayenburg

### Inleiding

Uiteindelijk is Baron Jean-Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830) nog heel aardig terechtgekomen. Secretaris van de *Académie Française* bij zijn dood, en daarna voortlevend als bedenker, eerste toepasser en naamgever van de Fourier-analyse.

Het idee van de Fourier-analyse is dat iedere wiskundige functie ontleed kan worden als een som van sinus- en cosinusfuncties. Ondanks aanvankelijke reserves van Fourier's tijdgenoten sloeg het aan, en de Fourier-analyse is nu een van de basisingrediënten voor wiskundigen, natuurkundigen en ander analyserend volk. De techniek wordt toegepast in de muziektheorie, de signaalanalyse, de quantum-mechanica en bij het oplossen van differentiaalvergelijkingen, om een paar voorbeelden te noemen. De Fourier-analyse is zo gewoon geworden, dat gebruik ervan vaak niet meer als toepassing opgemerkt wordt, net zomin als een nieuw model auto wordt aangeprezen als de laatste toepassing van het wiel.

Niet slecht voor een Franse kleermakerszoon met veertien broers en zussen, die op zijn tiende ook nog eens wees wordt. Gelukkig heeft hij een goed verstand, en hij wordt wiskundeleraar aan een kloosterschool. Dan breekt de revolutie uit. Joseph is een overtuigd republikein, maar wordt gearresteerd omdat hij in het tumult van revolutionaire bewegingen ergens een verkeerde kant gekozen had. Zijn vooruitzicht is de guillotine, maar hij ontsnapt op het nippertje als Robespierre, de leider van de revolutie, zelf afgezet en onthoofd wordt. Fourier komt vrij.

De volgende keer dat Fourier van zich laat horen is als lid van een delegatie van 165 wetenschappers die met Napoleon op de veldtocht van 1800 naar Egypte gaat. Ze worden allemaal gevangen genomen door de Engelsen, als die de Franse marine verslaan. Napoleon is dan nog in Turkije aan het vechten. De Engelse admiraal Smith is zo vriendelijk de Franse intellectuelen weer vrij te laten, al houdt hij hun papieren en archeologische vondsten achter. Hierbij is ook de steen van Rosetta, die nu nog in Londen tentoongesteld wordt.

Hoewel de veldtocht van Napoleon een mislukking is, had Fourier bewezen een kundig bestuurder te zijn, en hij werd benoemd tot prefect van Isère



in Zuid-Frankrijk. Tussen de politieke bedrijven door weet hij ook nog tijd voor wiskunde en natuurkunde vrij te maken. In deze periode bedenkt hij de Fourier-analyse, die hij gebruikt om het probleem van de warmteverdeling in vaste voorwerpen op te lossen. Fourier wisselt behendig van partij als Napoleon afgezet wordt, en daarna de macht weer grijpt. Maar als Napoleon voorgoed wordt verbannen verliest Fourier zijn prefectschap. Hij krijgt er het lidmaatschap van de *Académie des Sciences* voor terug, en een rustig leven als academicus. In 1830 overlijdt hij in Parijs.

### Fourier-reeksen

Voor Fourier zich aan de wiskunde wijdde was de reeks

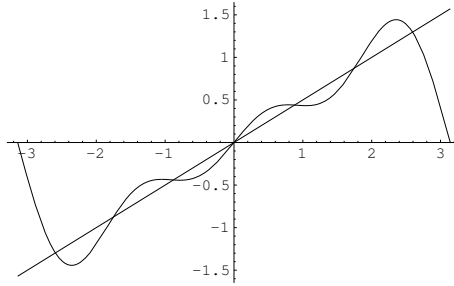
$$(1) \quad \frac{1}{2}x = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots$$

al bekend. Deze *trigonometrische reeks*, een som van de trigonometrische functies  $\sin nx$  en  $\cos nx$ , was al gevonden door de Zwitserse wiskundige Leonhard Euler (1707-1783), die echter niet vermeldde hoe hij er aan kwam. Hij vertelde ook niet dat de reeks alleen geldt als  $-\pi < x < \pi$ .

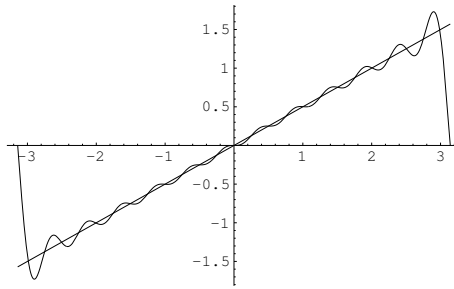
In figuur 1 is naast  $f(x)$  de grafiek van de reeks tot en met de derde term weergegeven, en in figuur 2 tot en met de twaalfde term. Het is duidelijk te zien dat de laatste benadering al redelijk dicht in de buurt van  $f(x)$  komt.

Fourier zag in dat deze reeks niet op zichzelf stond. Hij vermoedde dat elke functie te schrijven is als som van sinussen en cosinussen, met bepaalde coëfficiënten, die tegenwoordig te zijner ere *Fourier-coëfficiënten* genoemd worden. Veel wiskundigen van zijn tijd geloofden hem niet, maar in 1828 werd zijn vermoeden bewezen voor periodieke functies, door de wiskundige Dirichlet.

Periodieke functies zijn functies die zichzelf herhalen. Alle sinusfuncties  $\sin nx$  zijn periodiek: Als je ze over een afstand  $2\pi$  over de  $x$ -as verschuift is

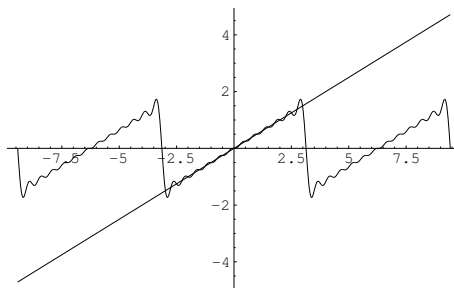


FIGUUR 1. De reeks (1) tot en met de derde term. . .



FIGUUR 2. . . en tot en met de twaalfde term.

hun grafiek weer precies als tevoren. Een som van zulke functies is dus ook periodiek. Dit is goed te zien als we  $\frac{1}{2}x$  en de Fourier-benadering ervan gaan bekijken buiten het interval  $(-\pi, \pi)$ , zie figuur 3.



FIGUUR 3. De reeks (1) over drie periodes, en de functie  $f(x) = \frac{1}{2}x$

### De Fourier-coëfficiënten uitrekenen

Formule (1) schrijft de functie  $\frac{1}{2}x$  als som van oneindig veel sinusfuncties, voor  $x$  in het interval  $(-\pi, \pi)$ . Fourier zocht een systematische manier om ook andere functies in de vorm van een trigonometrische reeks te schrijven. Met andere woorden, hij ging er van uit dat een bepaalde functie  $f(x)$  te schrijven

was als

$$f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + b_4 \sin 4x + b_5 \sin 5x + \dots,$$

en probeerde dan de coëfficiënten  $b_1, b_2$  enzovoort te vinden. Een reeks als deze heet nu een *Fourier-reeks*, en de coëfficiënten  $b_n$  worden de Fourier-coëfficiënten genoemd. De volgende manier om de om de coëfficiënten te bepalen is verwant aan de methode die Fourier zelf gebruikte.

De Fourier-coëfficiënt  $b_n$  is te beschouwen als het ‘gehalte’ van  $\sin nx$  in  $f(x)$ . Als  $f(x)$  bijvoorbeeld gelijk is aan  $4 \sin x + 3 \sin 2x$ , dan is het gehalte  $\sin x$  gelijk aan 4 en het gehalte  $\sin 2x$  is 3.

Hoe bepaal je nu, in het algemeen, het gehalte aan  $\sin nx$ ? Je kunt proberen  $b_n$  zo te kiezen dat  $b_n \sin nx$  de functie  $f(x)$  zo goed mogelijk benadert. Dat betekent dat je  $b_n$  zo aanpast dat het verschil tussen  $f(x)$  en  $b_n \sin nx$  minimaal is. Een maat voor dit verschil is de integraal

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - b_n \sin nx)^2 dx.$$

(Het kwadraat zorgt ervoor dat ieder verschil tussen  $f(x)$  en  $\sin nx$  een positieve bijdrage levert aan de integraal: positieve en negatieve afwijkingen vallen zo niet tegen elkaar weg.) Hoe kleiner  $I$ , des te beter benadert  $b_n \sin nx$  de functie  $f(x)$ . Door  $b_n$  te variëren proberen we nu  $I$  zo klein mogelijk te maken.  $I$  is op zijn kleinst als de afgeleide van  $I$  naar  $b_n$  nul is. Voor de afgeleide vinden we:

$$\begin{aligned} \frac{d}{db_n} I &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d}{db_n} (f(x) - b_n \sin nx)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} 2(-\sin nx)(f(x) - b_n \sin nx) dx \\ &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} -f(x) \sin nx + b_n \sin^2 nx dx. \end{aligned}$$

De integraal met  $\sin^2 nx$  is met de formule  $\sin^2 nx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2nx$  eenvoudig uit te rekenen, en we vinden voor  $n > 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{db_n} I &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} -f(x) \sin nx + b_n \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2nx \right) dx \\ &= -2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx + 2\pi b_n. \end{aligned}$$

Deze uitdrukking nul stellen geeft deze formule voor  $b_n$ , het gehalte aan  $\sin nx$ :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

**Een voorbeeld:**  $b_n$  voor  $f(x) = \frac{1}{2}x$ . We kijken of met de net gevonden methode de reeks (1) terug kunnen vinden.  $f(x)$  is nu dus  $\frac{1}{2}x$ . De integraal die we krijgen door  $f(x)$  in de formule hierboven in te vullen, is uit te rekenen met

behulp van partiële integratie. Het gehalte in  $f(x)$  aan  $\sin x$ , ofwel de eerste Fourier-coëfficiënt  $b_1$  is

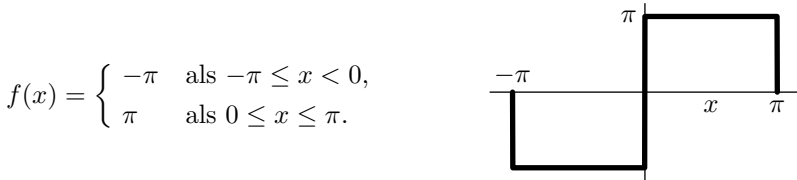
$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} x \sin x dx = \frac{1}{\pi} \left( -\frac{1}{2} x \cos x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx \right) = 1,$$

en de Fourier-coëfficiënten met  $n = 2, 3, \dots$  zijn

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} x \sin n x dx = \frac{1}{\pi} \left( -\frac{1}{2n} x \cos n x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx \right) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Met deze coëfficiënten  $b_n$  in de Fourier-reeks krijgen we precies de reeks (1) terug. De factor  $(-1)^{n-1}$ , die ervoor zorgt dat de coëfficiënten afwisselend positief en negatief zijn, komt van een factor  $\cos n\pi$ , die  $-1$  is voor oneven  $n$ , en  $1$  als  $n$  even is.

**Nog een voorbeeld: De blok golf.** Laten we de methode eens toepassen op een functie waarvan we de coëfficiënten nog niet weten, bijvoorbeeld de functie



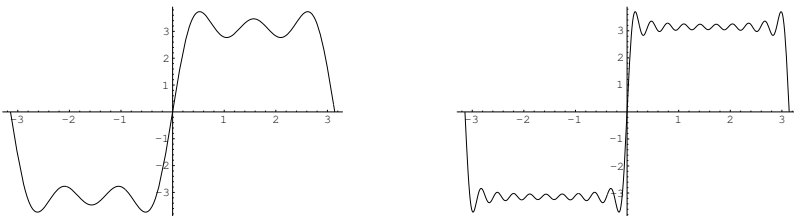
De Fourier-coëfficiënten zijn

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n x dx = \int_{-\pi}^0 -\sin n x dx + \int_0^{\pi} \sin n x dx = \begin{cases} 0 & (n \text{ even}), \\ \frac{4}{n} & (n \text{ oneven}), \end{cases}$$

en de Fourier-reeks wordt dus:

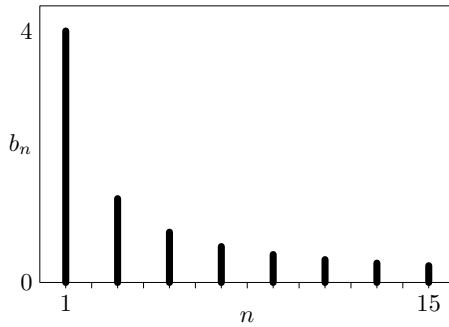
$$(2) \quad f(x) = 4 \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \frac{1}{9} \sin 9x + \dots \right)$$

De grafieken van  $f(x)$  en zijn Fourier-reeksen tot en met de derde en tot en met de tiende term is in figuur 4 afgebeeld. Ook hier is duidelijk te zien hoe de Fourier-reeks steeds meer op de functie  $f(x)$  gaat lijken naarmate er meer termen worden meegenomen.



FIGUUR 4. Fourier-reeks van de blok golf, met 3 en 10 termen

**Frequentiespectra.** De frequentie-inhoud van een functie wordt vaak weergegeven met een staafdiagram van de coëfficiënten  $b_n$ . Dit heet het *frequentiespectrum* van de functie. Hieronder staat het frequentiespectrum van de blokgolf. De gehalten aan de verschillende frequenties zijn gemakkelijk af te lezen. Je ziet bijvoorbeeld in één oogopslag dat de even coëfficiënten nul zijn.



FIGUUR 5. Frequentiespectrum van de blokgolf

### Fourier-reeksen ‘in het echt’

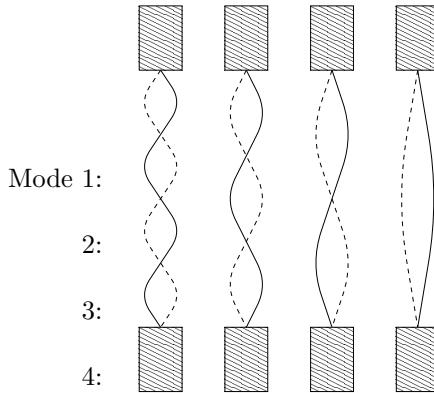
Op een natuurlijke manier vinden we de Fourier-reeksen terug als we muziek gaan onderzoeken. Geluid is het veranderen van de luchtdruk met de tijd. Je kunt geluid dus als een functie  $f(t)$  van de tijd beschouwen. Het vinden van de Fourier-coëfficiënten van die functie is dan het vinden van de *frequenties* waaruit het geluid is opgebouwd.

Een eenvoudig instrument is de gespannen snaar. De eindpunten van de snaar zitten vast, maar daartussen kan hij op verschillende manieren trillen. Elke van deze manieren van trillen kan gezien worden als een combinatie van elementaire trillings-*modes*, die in figuur 6 schematisch weergegeven zijn. De snaar beweegt heen en weer tussen de ononderbroken en de onderbroken lijn.

Deze modes hebben elk hun eigen frequentie. De eerste beweegt het langzaamst en veroorzaakt een toon met een lage frequentie  $f_0$ . Deze toon wordt de *grondtoon* genoemd. Mode 2 beweegt twee keer zo snel, en de frequentie van de toon is dus ook twee keer zo hoog. In het plaatje zie je dat de snaar, in deze mode, twee ‘bulten’ vertoont. Deze bulten worden *buiken* genoemd. Tussen de buiken zitten punten die helemaal niet bewegen, en deze heten *knopen*.

Zo gaat het door: Mode  $k$  heeft  $k$  buiken, en veroorzaakt een toon met frequentie  $kf_0$ . Deze frequenties worden in de muziektheorie wel *harmonischen* genoemd (van de grondtoon  $f_0$ ): ze klinken namelijk harmonieus samen met  $f_0$ . De tweede harmonische bijvoorbeeld,  $2f_0$ , klinkt precies een oktaaf hoger dan de grondtoon.

Een echte snaar beweegt altijd in verschillende elementaire trillingsmodes tegelijk. Het verband met Fourier-analyse is nu niet moeilijk te leggen: Het geluidssignaal  $f(t)$  dat van de snaar afkomt is op te vatten als een som van de harmonischen met frequenties  $f_0, 2f_0, 3f_0$  enzovoort. De Fourier-coëfficiënten



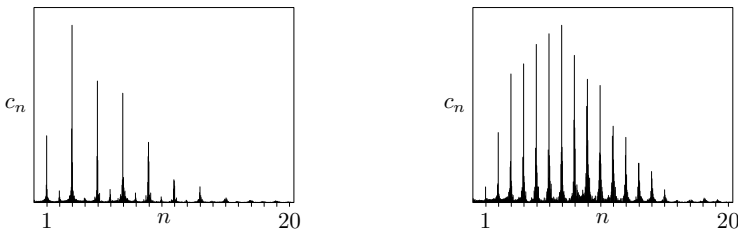
FIGUUR 6. De verschillende trillingsmodes van een snaar.

van  $f(t)$  corresponderen met het aandeel van iedere frequentie in de toon. (Dit is de reden waarom Fourier-analyse soms ook *harmonische analyse* wordt genoemd.)

De verhouding van de verschillende coëfficiënten bepaalt de *klankkleur* van de toon. Een toon waarin de hogere frequenties relatief sterk zijn ten opzichte van de grondtoon klinkt ‘helderder’ dan alleen de grondtoon. De grondtoon alleen, enkel een sinussignaal, klinkt ‘doods’ en kaal.

**Tonen en klankkleur.** Veel instrumenten bieden de mogelijkheid om de klankkleur te manipuleren. Bij tokkelinstrumenten is bijvoorbeeld het punt waarop de snaar wordt aangeslagen van invloed op de klankkleur. Als de snaar precies in het midden aangeslagen wordt, trilt hij alleen in de *oneven* modes. Dit is ook te zien in figuur 6: De oneven modes hebben in het midden buiken, terwijl de even modes daar een knoop hebben.

Aan de andere kant, als de snaar aan een uiteinde wordt aangeslagen, trillen alle modes mee. Verder zijn de hoge modes relatief sterk, omdat deze modes vlak aan de rand vrij hoge amplitudes hebben, terwijl de lage modes aan de rand nauwelijks een uitwijking hebben. De toon klinkt daardoor veel scheller. In figuur 7 zijn frequentiediagrammen getekend van deze twee situaties.

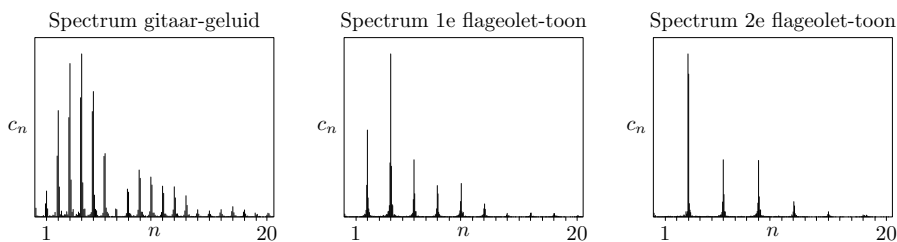


FIGUUR 7. Frequentiespectra van gitaarsnaar, aangeslagen in het midden (links) en aan een uiteinde (rechts).

Bij elektrische gitaren wordt van dit principe gebruik gemaakt door de magnetische elementen op verschillende plaatsen onder de snaren te plaatsen. Deze elementen zetten de beweging van de snaar om in een elektrisch signaal. Veel gitaren hebben een element in het midden, dat een ‘warm’ geluid met veel lage harmonischen geeft, en een ‘schel’ element vlak bij de brug, die vooral hoge frequenties oppikt.

**Flageolettonen.** Een andere techniek bij viool- en gitaarspel is het spelen van *flageolet*-tonen. Normaal wordt de toon van een snaarinstrument veranderd door de lengte van de snaar te variëren, maar flageolettonen worden gemaakt door alleen bepaalde trillingsmodes mee te laten doen. In figuur 6 is te zien dat de snaar in alle trillingsmodes (behalve de grondmode) in bepaalde punten stilstaat: de knopen. Als de vinger op een bepaald punt van de snaar zacht neergelegd wordt, kan de snaar alleen maar trillen in de modes die op dat punt een knoop hebben. De vinger dempt de andere harmonischen.

Als de vinger bijvoorbeeld halverwege de snaar gelegd wordt, kan de snaar alleen maar in de even modes trillen. De laagste mode valt hier niet onder, dus de nieuwe grondtoon van de snaar heeft een twee maal zo hoge frequentie. Dit is een verschil van een oktaaf. Als de vinger op éénderde van de snaar gelegd wordt, kan de snaar alleen trillen in de derde, de zesde, de negende enz. mode. De grondtoon krijgt nu een drie maal zo hoge frequentie. Flageolettonen klinken dus hoog ten opzichte van de grondtoon van de snaar. In het frequentiespectrum van figuur 8 (midden) verdwijnt elke oneven coëfficiënt als er een flageolettoon halverwege de snaar gespeeld wordt.



FIGUUR 8. Verschillende geluidsspectra van de gitaar.

De harmonischen van een toon met frequentie  $f_0$  hebben dus de frequenties  $2f_0$ ,  $3f_0$  enzovoort. De muzikleer vertelt ons dat het verdubbelen van de frequentie neerkomt op een verschil (of een *interval*) van een oktaaf. Zo'n interval klinkt in onze oren erg harmonisch. Een toon die een oktaaf boven een andere zit, klinkt als een andere versie van diezelfde toon. De derde harmonische met frequentie  $3f_0$  zit een oktaaf plus een ‘reine kwint’ boven de de grondtoon, en de reine kwint wordt ook als erg harmonisch ervaren. De vierde harmonische zit twee oktaven boven de grondtoon, de vijfde twee oktaven en een reine kwart. Ook het reine kwart wordt in het algemeen nog als zuiver gehoord. Na de zesde harmonische, twee oktaven en een reine kwint boven de grondtoon, komt echter de zevende, die door de meeste oren als buitengewoon vals wordt

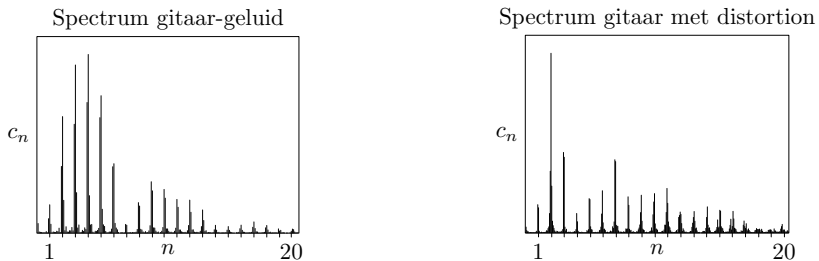


opgevat. En ook daarboven komt een aantal harmonischen dat helemaal niet zo harmonieus meer klinkt met de grondtoon. In het algemeen maken sterke hoge harmonischen een toon vals. In figuur 8 (links) is te zien dat de 7e harmonische vrijwel afwezig is bij een normaal aangeslagen snaar. Dit is geen toeval, maar het resultaat van een zorgvuldig ontwerp van de gitaar.

Een extra effect van het dempen met de vinger bij flageolettonen is het vermijden van te hoge harmonischen (de vinger heeft een bepaalde breedte en dempt hoge harmonischen, die hun buiken vlak bij de vinger hebben). Flageolettonen klinken dan ook, naast hoger, ook ‘zuiverder’ en ‘ijler’ dan gewoon aangeslagen snaren.

**Vervorming.** Een effect dat gebaseerd is op het vals klinken van boventonen is de vervorming of *distortion* van elektronische signalen. Loeiende elektrische gitaren, bonkende gabberbeats en bijna alles wat vuig en ruig klinkt in de (pop)muziek is eigenlijk gewoon door een slechte versterker gehaald. Een slechte versterker is bijvoorbeeld eentje die niet verder versterkt dan een bepaald niveau, en van een sinusgolf een afgekapte versie maakt, die meer lijkt op een blok golf.

In het algemeen zorgt vervorming ervoor dat er meer hoge harmonischen ontstaan. In figuur 9 hieronder staan de spectra van een elektrische gitaar zonder en met *distortion*. De lage harmonischen (voor  $n = 2$  tot 6) zijn relatief zwakker geworden, terwijl de hoge harmonischen aan kracht hebben gewonnen. Onder andere de beruchte zevende harmonische is sterk aanwezig. De hoge harmonischen geven de oorspronkelijke vrij zuivere gitaartoon een gruisig, vals geluid.



FIGUUR 9. Spectrum van de gitaar zonder en met *distortion*.

Wat begon als een technisch probleem, slechte versterking, heeft een hoge vlucht genomen. Een niet-vervormende versterker kun je aan een elektrische gitarist niet meer kwijt, en er zijn veel apparaten in de handel om elektronische signalen al te vervormen voor ze versterkt worden.

**De illusie van de 32-voeter.** Een laatste truc, deze keer ter meerdere glorie Gods, en één die ook goed is te begrijpen met Fourierspectra, is de illusie van de 32-voeter op het kerkorgel. Kerkorgels bestaan voor het grootste deel uit orgelpijpen. De lengte van de orgelpijp bepaalt de grondtoon, en net als bij een snaar zijn de boventonen harmonischen van deze grondtoon. Door verschillende



FIGUUR 10. Orgel in de Sint Bavokerk in Haarlem.

combinaties van pijpen aan te sluiten op het klavier kunnen er verschillende klanken gemaakt worden. Deze combinaties heten de *registers* van een orgel. Gewone orgelpijpen zijn acht voet (iets minder dan drie meter) hoog, en worden daarom achtvoeters genoemd. In veel kerkorgels zitten ook zestienvoeters, maar tweeëndertigvoeters zijn toch wel zeldzaam, en vind je alleen in heel grote kerkorgels (en dito kerken). Deze pijpen hebben een erg lage en indrukwekkende toon. Met de registers is het nu mogelijk om de *illusie* van het indrukwekkende tweeëndertigvoeter-geluid te wekken door een deel van zijn spectrum op te bouwen uit de spectra van een zestienvoeter en dat van een tientweederdevoeter. In het nagemaakte spectrum mist de grondtoon  $f_0$ , maar wonderlijk genoeg kan het menselijk gehoor die aanvullen. Je meent de grondtoon van een tweeëndertigvoeter te horen omdat die gesuggereerd wordt door de rest van het spectrum, terwijl de grondtoon in feite volledig afwezig is.

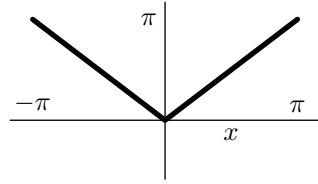
Dit is een verschijnsel dat *fundamental tracking* genoemd wordt (*fundamental* = grondtoon), en het heeft te maken met de frequentie van de kleinste repeterende eenheid in de golfvorm. Het treedt bij heel veel geluiden op: kijk bijvoorbeeld naar de frequentiespectra van gitaargeluid in figuur 9, die allebei een zwakke grondtoon te zien geven, terwijl dat wel de toonhoogte is die je hoort. Het nep-tweeëndertigvoeter-geluid is overigens door de kritische luisteraar wel te onderscheiden van dat van een echte tweeëndertigvoeter, met name in de maagstreek.

### Is dit alles?

Het recept dat we nu hebben ‘peilt’ de sinusgehalten in een functie  $f(x)$ . Maar stel dat er een functie  $f(x)$  nog iets anders bevat dan alleen maar sinussen.

Neem bijvoorbeeld de functie

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{als } x \leq 0, \\ x & \text{als } x \geq 0. \end{cases}$$



De Fouriercoëfficiënten  $b_n$  van de sinussen zijn:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin nx dx = \int_{-\pi}^0 -x \sin nx dx + \int_0^{\pi} x \sin nx dx = 0,$$

en het gehalte aan sinussen is dus nul. Laten we dan eens proberen het gehalte  $a_n$  aan cosinussen te bepalen, op dezelfde manier als we het met sinussen gedaan hebben. We bepalen weer de integraal  $I$ , die een maat is voor het verschil tussen  $f(x)$  en  $a_n \cos nx$ :

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - a_n \cos nx)^2 dx.$$

We minimaliseren  $I$  weer door de afgeleide naar de coëfficiënt  $a_n$  nul te stellen:

$$\frac{d}{da_n} I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d}{da_n} (f(x) - a_n \cos nx)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} (-2 \cos nx)(f(x) - a_n \cos nx) dx = 0,$$

wat de nieuwe Fourier-coëfficiënt  $a_n$  voor cosinussen oplevert:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

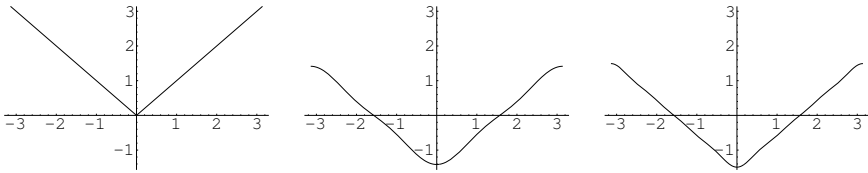
Deze formule lijkt veel op die voor de sinus-coëfficiënten. We kunnen hem gebruiken om Fourier-coëfficiënten  $a_n$  voor de functie  $|x|$  uit te rekenen:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 (-x) \cos nx dx + \int_0^{\pi} x \cos nx dx \right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{als } n \text{ even is,} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{als } n \text{ oneven is,} \end{cases} \end{aligned}$$

en niets is eenvoudiger deze formules in een computer te stoppen en de plaatjes te tekenen. Hieronder zie je de oorspronkelijke functie  $f(x)$ , met daarbij de Fourier-reeks

$$-\frac{4}{\pi} \left( \cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x + \dots \right)$$

benaderd tot en met de derde en tot en met de twaalfde term.



Er is iets misgegaan. De benadering lijkt heel aardig te kloppen, behalve dat de Fourier-reeks in de  $y$  richting opgeschoven is. De oorspronkelijke functie ligt geheel boven de  $x$ -as, terwijl de Fourier-reeks er zowel boven- als onderuit steekt. In feite is het *gemiddelde* van de Fourier-reeks precies 0: er steekt evenveel boven- als onderuit. Dit is ook wel te begrijpen, want elke component van de reeks,  $\sin nx$  of  $\cos nx$ , heeft gemiddelde 0 over het interval  $[-\pi, \pi]$ , dus sommen van die functies ook. Om ook functies als  $f(x) = |x|$  te kunnen beschrijven, voeren we een nulde, constante Fourier-coëfficiënt in. Deze coëfficiënt is precies het gemiddelde van de functie  $f(x)$  over het interval  $[-\pi, \pi]$ :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Deze coëfficiënt is voor  $f(x) = |x|$  bijvoorbeeld  $a_0 = \frac{\pi}{2}$ , en hiermee benadert de reeks

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x + \dots \right)$$

de functie  $f(x)$  wel goed.

**Het Fourier-totaalconcept.** Met de Fourier-sinusreeks, de Fourier-cosinusreeks en de nulde coëfficiënt  $a_0$  is iedere functie in het interval  $[-\pi, \pi]$  te benaderen. De gecombineerde Fourier-reeks is dan

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + b_1 \sin x + a_1 \cos x + b_2 \sin 2x + a_2 \cos 2x + b_3 \sin 3x + a_3 \cos 3x + \dots \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \sin nx + a_n \cos nx), \end{aligned}$$

waarin de Fourier-coëfficiënten uit de functie gehaald kunnen worden met volgende formules:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \end{aligned}$$

**De amplitude van de frequentie  $f_n$ .** De coëfficiënten  $b_n$  en  $a_n$  beschrijven allebei een bijdrage met dezelfde frequentie, zeg  $f_n$ . Het verschil is dat  $b_n$  een sinus-bijdrage is, terwijl  $a_n$  een cosinus is. Deze cosinus is te beschouwen als een verschoven sinus: er geldt immers  $\sin x = \cos(x - \frac{1}{2}\pi)$ . De totale bijdrage aan de frequentie  $f_n$  is  $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ . Ook deze som is te beschouwen als een verschoven sinus. Bij gegeven  $a_n$  en  $b_n$  bestaan er getallen  $c_n$  en  $\phi$  zodat de volgende vergelijking opgaat:

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = c_n \sin(nx + \phi),$$

De coëfficiënt  $c_n$  staat voor de totale sterkte, of *amplitude*, van de frequentie  $f_n$  in de functie. De verschuiving van de sinus wordt gegeven door  $\phi$ . Toepassing van de somregel voor de sinus levert: (zie ook opgave 1)

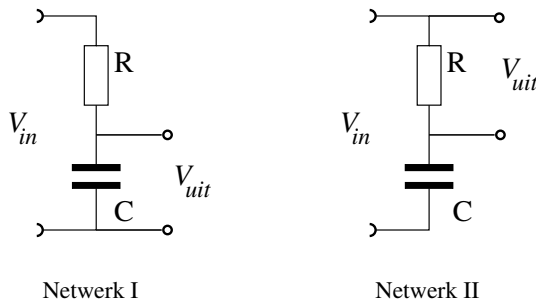
$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

In de staafspectra geven we altijd de coëfficiënten  $c_n$  weer. Als er alleen maar sinusbijdragen (of cosinusbijdragen) zijn, is  $c_n = |b_n|$  (of  $c_n = |a_n|$ ).

### Geluid en filters

**Twee simpele filters.** Een *filter* is een apparaat dat de onderlinge sterktes van frequenties verandert. Een demper van een trompet is een goed voorbeeld: met demper zijn de lage frequenties relatief sterker. Achter de knoppen *treble* en *bass* van een versterker zitten ook filters, die voornamelijk hoge respectievelijk lage frequenties doorlaten. Deze filters worden hoogdoorlaat of *hi-pass*, en laagdoorlaat of *lo-pass* filters genoemd.

Het is niet moeilijk om met wat electronica zulke filters te bouwen. In deze paragraaf bekijken we twee eenvoudige elektronische filters, en berekenen we met behulp van Fourier-analyse welk effect ze hebben op het ingevoerde signaal. Zie figuur 11 voor de schakelschema's.



FIGUUR 11. RC-netwerken

Het eerste filter is een *lo-pass* filter, het tweede laat liever hoge frequenties door. Dit soort filters worden RC-netwerken genoemd.

Voordat we aan de berekening beginnen, eerst wat natuurkunde. Er geldt  $V_C = \frac{Q}{C}$ , waarbij  $V_C$  de spanning over de condensator,  $Q$  de lading op de platen

en  $C$  de capaciteit is. Verder is  $I_C = \frac{dQ}{dt}$ : de stroom door de condensator is de verandering van de lading per seconde. Samen met de eerste formule volgt dan  $I_C = C \frac{dV_C}{dt}$ . In beide schakelingen zijn de weerstand en de condensator in serie geschakeld. Als  $V_{in}$  de spanning (op een bepaald tijdstip) aan de ingang is, geldt er dus:  $V_{in} = V_C + V_R$ . Uit de wet van Ohm volgt dat  $V_R = I_R R$ . Omdat de weerstand en de condensator in serie staan, geldt  $I_R = I_C$ , dus  $V_R = I_C R = RC \frac{dV_C}{dt}$ . Uiteindelijk leidt dit tot de volgende formule, die geldt voor beide netwerken:

$$(3) \quad V_{in} = V_C + RC \frac{dV_C}{dt}.$$

**Netwerk I.** Beschouw nu netwerk I, en stel dat  $V_{in}$  een sinusvormig signaal is, met een zekere frequentie en amplitude. Dan zal  $V_{uit,I} = V_C$  dezelfde frequentie hebben, maar een andere amplitude. Vanwege het vertragende karakter van een RC-netwerk zal het uitgangssignaal in het algemeen ook wat in fase verschoven zijn. In formules vatten we deze aannames samen met

$$V_{in} = b_{in} \sin(ft),$$

$$V_{uit,I} = V_C = a_{uit,I} \cos(ft) + b_{uit,I} \sin(ft).$$

Volgens formule (3) moeten de coëfficiënten  $b_{uit,I}$  en  $a_{uit,I}$  nu voldoen aan deze vergelijking:

$$b_{in} \sin(ft) = a_{uit,I} \cos(ft) + b_{uit,I} \sin(ft) + RC (-f a_{uit,I} \sin(ft) + f b_{uit,I} \cos(ft)).$$

Links staan geen cosinussen, dus rechts moeten de cosinussen ook wegvallen. Hieruit volgt dat  $a_{uit,I} = -RC f b_{uit,I}$ . De coëfficiënt van de sinus, rechts, moet gelijk zijn aan  $b_{in}$ , en dit betekent dat

$$b_{in} = b_{uit,I} - RC f a_{uit,I} = b_{uit,I} + (RC f)^2 b_{uit,I}.$$

Het resultaat is tenslotte:

$$(4) \quad \boxed{\begin{aligned} b_{uit,I} &= b_{in} \frac{1}{1 + (RCf)^2} \\ a_{uit,I} &= b_{in} \frac{-RCf}{1 + (RCf)^2} \end{aligned}}$$

**Netwerk II.** Wat doet netwerk II met een sinus-signaal? Voor dit netwerk geldt  $V_{uit,II} = V_R$ , terwijl  $V_{uit,I} = V_C$ . De formule  $V_R = RC \frac{dV_C}{dt}$ , die hierboven al is afgeleid, geeft een verband tussen  $V_{uit,I}$  en  $V_{uit,II}$ . Hiermee kunnen de coëfficiënten  $b_{uit,II}$  en  $a_{uit,II}$  uit de formules (4) gevonden worden. Er geldt  $V_{uit,I} = V_C = b_{uit,I} \sin ft + a_{uit,I} \cos ft$ . Hiervan de afgeleide nemen geeft:

$$\frac{dV_C}{dt} = -f a_{uit,I} \sin ft + f b_{uit,I} \cos ft.$$

Invullen van  $V_{uit,II} = V_R = RC \frac{dV_c}{dt}$  en formules (4) geeft de sinus- en cosinus-coëfficiënten van netwerk II:

$$(5) \quad \boxed{\begin{aligned} b_{uit,II} &= b_{in} \frac{(RCf)^2}{1 + (RCf)^2} \\ a_{uit,II} &= b_{in} \frac{RCf}{1 + (RCf)^2} \end{aligned}}$$

**Hi-pass en Lo-pass filters.** Hoe kun je nu zien welk netwerk een hi-pass filter is, en welk een lo-pass? Hiervoor kijken we hoe de totale amplitude  $c_{uit} = \sqrt{a_{uit}^2 + b_{uit}^2}$  door het filter wordt veranderd.

Hetingangssignaal is een zuivere sinusgolf. De amplitude  $c_{in}$  is dus gelijk aan  $b_{in}$  (of eigenlijk,  $c_{in} = \sqrt{b_{in}^2} = |b_{in}|$ ). We berekenen nu  $c_{uit,I}$ , de amplitude van het uitgangssignaal van netwerk I. Invullen in de formule  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  geeft

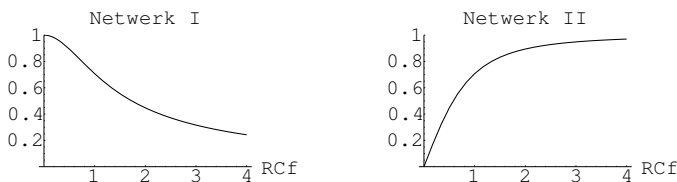
$$c_{uit,I} = \sqrt{\left(\frac{b_{in}}{1 + (RCf)^2}\right)^2 + \left(\frac{-RCf b_{in}}{1 + (RCf)^2}\right)^2} = b_{in} \frac{1}{\sqrt{1 + (RCf)^2}}.$$

De totale amplitude wordt dus kleiner, afhankelijk van de frequentie van hetingangssignaal, met een factor  $1/\sqrt{1 + (RCf)^2}$ . Een mooi woord voor de grafiek van deze functie is *transmissie-diagram*: de grafiek geeft aan met welke sterkte elke frequentie wordt doorgegeven. Dit diagram staat in figuur 12. Als  $f = 0$  is de factor 1, en laat het netwerk het hele signaal door. Als  $f$  heel groot wordt gaat de factor naar 0. Netwerk I is dus een *lo-pass* filter.

Dezelfde exercitie voor netwerk II levert als resultaat:

$$c_{uit,II} = \sqrt{\left(\frac{(RCf)^2 b_{in}}{1 + (RCf)^2}\right)^2 + \left(\frac{RCf b_{in}}{1 + (RCf)^2}\right)^2} = b_{in} \frac{RCf}{\sqrt{1 + (RCf)^2}}.$$

Aan het transmissie-diagram voor Netwerk II is te zien dat dit een *hi-pass* filter is: als  $f = 0$  wordt niets doorgelaten, terwijl de factor naar 1 gaat voor hoge frequenties.



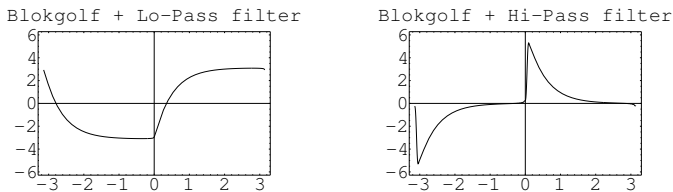
FIGUUR 12. Transmissie-diagrammen van beide netwerken.

**Gefilterde blokgolven.** We hebben gezien hoe de netwerken reageren op een sinusgolf. Als het ingangssignaal een *som* van zulke sinusgolven is, mag je net doen alsof het netwerk op elke golf afzonderlijk werkt, en de resultaten achteraf optellen. Van elke fouriercomponent kun je dus afzonderlijk nagaan in welke mate het netwerk deze component verzwakt.

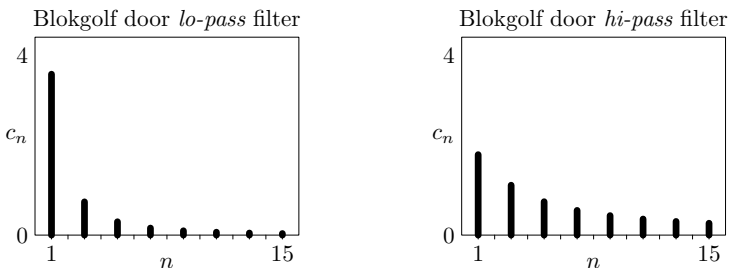
We passen dit toe op de blok golf. De Fourier-coëfficiënten hiervan zijn al uitgerekend:  $b_n = 0$  voor even  $n$ ,  $b_n = 4/n$  als  $n$  oneven is, en alle  $a_n$  zijn nul. Stel de blok golf heeft een grondfrequentie  $f_0$ . De frequentie behorende bij de  $n$ -de Fourier-component is dan  $nf_0$ . Voor het gemak kiezen we  $R$  en  $C$  zo dat het produkt  $RCf = \frac{1}{2}$ . Met formules (4) en (5) vinden we dan voor de gefilterde blokgolven:

$$\begin{aligned} b_{uit,I} &= \frac{1}{1+4n^2} & b_{uit,II} &= \frac{4n^2}{1+4n^2} \\ a_{uit,I} &= \frac{-2n}{1+4n^2} & a_{uit,II} &= \frac{2n}{1+4n^2}, \quad (n \text{ oneven}) \end{aligned}$$

Plaatjes van de bijbehorende Fourier-reeksen staan hieronder:



Het is duidelijk te zien dat het lo-pass filter een ‘afgerondere’ blok golf oplevert, terwijl het hi-pass filter de hoekige blok golf nog steiler maakt. Als je naar de bijbehorende tonen luistert klinkt de eerste veel zwoeler dan de laatste, die juist heel scherp klinkt. Ook aan de frequentiespectra in figuur 13 is goed te zien wat de filters met de verschillende Fourier-componenten doen.



FIGUUR 13. Effect van *lo-pass* en *hi-pass* filters op het frequentie-diagram van de blok golf.



### De periode van de Fourier-reeks

Alle functies die we hiervoor behandeld hebben, waren periodiek met periode  $2\pi$ . In de praktijk willen we de Fourier-methode ook voor functies met een andere periode gebruiken. Dit is mogelijk door de variabele  $x$  te herschalen. De frequenties die bij de coëfficiënten horen, veranderen daarbij ook.

Stel we willen de functie  $f(x)$  benaderen die periode  $2L$  heeft. De functie wordt dus helemaal beschreven door de functiewaarden in het interval  $x \in [-L, L]$ . Als we nu de functie  $g(y) = f\left(\frac{L}{\pi}y\right)$  definiëren, komt dit neer op het benaderen van  $g(y)$  in het interval  $y \in [-\pi, \pi]$ . Voor  $g(y)$  kunnen we volgens beproefd recept de Fourier-coëfficiënten uitrekenen:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) dy, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \cos ny dy, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \sin ny dy. \end{aligned}$$

Deze coëfficiënten kunnen we ook in termen van  $f(x)$  uitdrukken als we in de integralen de integratievariabele  $y$  door  $\frac{\pi}{L}x$  vervangen. De Fourier-coëfficiënten worden dan

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi}y\right) \cos ny dy = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right) dx, \\ a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) dx. \end{aligned}$$

Deze formules worden de *Euler-formules* genoemd. Vervolgens kan uit de Fourier-reeks van  $g(y)$  die van  $f(x)$  gevonden worden, wanneer  $y$  door  $\frac{\pi}{L}x$  vervangen wordt:

$$g(y) = a_0 + a_1 \cos y + b_1 \sin y + a_2 \cos 2y + b_2 \sin 2y + \dots = f\left(\frac{L}{\pi}y\right).$$

Hieruit volgt voor  $f(x)$ :

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos \frac{\pi}{L}x + b_1 \sin \frac{\pi}{L}x + a_2 \cos 2\frac{\pi}{L}x + b_2 \sin 2\frac{\pi}{L}x + \dots$$

Op deze manier is, met een eenvoudige truc, de methode van Fourier uitgebreid voor functies met een willekeurige periode.

### Leuke $\pi$ -formules

Tot nu toe hebben we vooral toepassingen in de natuurkunde bekeken, maar de Fourieranalyse blijkt ook heel nuttig te zijn voor zuiver wiskundige

problemen. In dit laatste hoofdstuk gaan we de methode van Fourier gebruiken om enkele oneindige reeksen voor  $\pi$  te vinden.

**Een reeks voor  $\pi$ .** Misschien wel de bekendste reeks voor  $\pi$  is de volgende:

$$(6) \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

De som van de eerste 1000 termen geeft de benadering  $\pi = 3,1426$ . Deze formule is te bewijzen uit de Fourierreeks voor de blokgolf, die we al uitgerekend hebben:

$$f(x) = 4 \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \dots \right)$$

Als je hierin  $x = \pi/2$  invult, staat er links  $f(\pi/2) = \pi$ , en rechts worden de sinusen afwisselend  $+1$  en  $-1$ . Links en rechts delen door 4 geeft dan precies de gezochte formule.

De gevonden reeks heeft wel een nadeel: je moet erg veel termen uitrekenen om een redelijke benadering van  $\pi$  te vinden. Voor vijf decimalen moet je al ongeveer 100000 termen meenemen.

**Een reeks voor  $\pi^2$ .** Laten we hetzelfde recept eens toepassen op de Fourier-reeks voor de functie  $f(x) = |x|$ . Deze hebben we ook al uitgerekend: het was een reeks met alleen maar cosinussen. In deze reeks vullen we  $x = 0$  in. Alle cosinussen in de reeks worden dan 1, en  $f(x)$  zelf is 0 in  $x = 0$ . Dit leidt tot de vergelijking

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \dots \right)$$

en na wat herschrijven

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} \dots$$

De afzonderlijke termen van deze reeks zijn veel kleiner dan die van reeks (6). Vreemd genoeg heb je toch nog evenveel termen nodig om tot een goede benadering van  $\pi^2$  (en dus van  $\pi$ ) te komen: weer ongeveer 100000 voor vijf decimalen. Dit heeft ermee te maken dat in deze reeks de termen allemaal positief zijn, terwijl ze in reeks (6) afwisselend positief en negatief waren.

**De reeks van Euler.** Er bestaat nog een reeks voor  $\pi^2$ , die ook met behulp van de methode van Fourier gevonden kan worden, maar daarvoor moeten we wat extra werk doen.

Even wat anders. Laten we  $a + b + c + d$  eens kwadrateren. Enig schrijfwerk levert als resultaat:

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$$

Elke term van de som komt als kwadraat terug, en verder komen alle mogelijke combinaties van verschillende termen terug, elk met een factor twee. Dit zijn

de *kruistermen* van het kwadraat. Nu terug naar Fourierreeksen. Stel dat  $f(x)$  een Fourierreeks heeft met alleen maar sinussen:

$$f(x) = b_1 \sin(x) + b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x) + b_4 \sin(4x) + \dots$$

Neem links en rechts het kwadraat. Links is makkelijk, maar rechts staan oneindig veel termen. Laten we daar niet moeilijk over doen, en gewoon de uitkomst van  $(a + b + c + d)^2$  als voorbeeld nemen. Je krijgt dan:

$$\begin{aligned} f(x)^2 &= b_1^2 \sin^2(x) + b_2^2 \sin^2(2x) + b_3^2 \sin^2(3x) + b_4^2 \sin^2(4x) + \dots + \\ &\quad 2b_1 b_2 \sin(x) \sin(2x) + 2b_1 b_3 \sin(x) \sin(3x) + \dots + \\ &\quad 2b_2 b_3 \sin(2x) \sin(3x) + 2b_2 b_4 \sin(2x) \sin(4x) + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \sin^2(nx) + \sum_{n \neq m, n < m} 2b_n b_m \sin(nx) \sin(mx). \end{aligned}$$

Achter het tweede som-teken staan precies de kruistermen. De opmerking  $n < m$  onder het somteken zorgt ervoor dat we geen termen twee keer meenemen.

Nu komt de grote truuk: we gaan integreren over het interval  $[-\pi, \pi]$ . Met behulp van de formule

$$\sin^2(nx) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2nx)$$

is de integraal van  $b_n^2 \sin^2(nx)$  gemakkelijk uit te rekenen:

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n^2 \sin^2(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} b_n^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2nx) \right) dx = 2\pi \left( \frac{1}{2} b_n^2 \right) = \pi b_n^2.$$

Voor de integraal over een term  $b_n b_m \sin(nx) \sin(mx)$  met  $n \neq m$  gebruiken we de volgende formule:

$$\sin(nx) \sin(mx) = \frac{1}{2} \cos((n - m)x) - \frac{1}{2} \cos((n + m)x)$$

(Uit deze formule is de vorige trouwens direct af te leiden.) Omdat  $n \neq m$  is  $n - m \neq 0$ , en omdat  $n$  en  $m$  beide positief zijn is  $n + m$  ook niet 0. Dat betekent dat de integraal van allebei de cosinussen over het interval  $[-\pi, \pi]$  nul is. Na het integreren vallen alle kruistermen dus weg. Het resultaat staat bekend als de *formule van Parseval*:<sup>1</sup>

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \pi (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots).$$

Vul nu onze oude bekende  $f(x) = \frac{1}{2}x$  in. De bijbehorende coëfficiënten zijn  $b_n = (-1)^{n-1}/n$ . De formule van Parseval geeft voor dit geval

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4} x^2 dx = \pi \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots \right).$$

<sup>1</sup>De aanname dat  $f(x)$  alleen sinustermen in zijn Fourierreeks heeft is niet echt nodig; het maakt de afleiding alleen wat prettiger. De hele formule van Parseval, voor algemene functies  $f$ , is  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \pi (2a_0^2 + a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2 + \dots)$

Uit de integraal komt  $\pi^3/6$ , en uiteindelijk staat er:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Rond 1700 vroeg de in Groningen werkende wiskundige Bernoulli zich al af wat er uit de som  $\sum \frac{1}{n^2}$  zou komen. Hij en vele wiskundigen van zijn tijd beten hun tanden erop stuk, en de oplossing werd uiteindelijk door Leonhard Euler (die van het getal  $e = 2,71828\dots$ ) gevonden. Het is grappig dat wij Euler's reeks voor  $f(x) = \frac{1}{2}x$  nodig hadden om dit resultaat te kunnen terugvinden – Euler zelf gebruikte een heel andere methode.

### Opgaven

1. De cosinus is te zien als een ‘vershoven sinus’:  $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ . Algemeener is de *som* van een cosinus en een sinus ook weer een vershoven sinus:

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = c_n \sin(nx + \phi).$$

Stel je kent  $a_n$  en  $b_n$ , bereken hieruit  $c_n$  en  $\phi$ . (Hint: Gebruik rechts de som-formule voor de sinus.)

2. Het resultaat van deze opgave is een reeks die met vrij weinig termen een benadering van  $\pi^2$ , en dus van  $\pi$ , geeft. De volgende reeksen zijn al berekend:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \dots$$

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

Trek de tweede reeks af van tweemaal de eerste. Welke reeks levert dit op? (Beschouw de even en oneven kwadraten apart.) Reken, op een computer, de som van de eerste 500 termen uit, en laat zien dat je (na worteltrekken) een benadering van  $\pi$  tot op 5 decimalen krijgt.

3. (Met computer.) Gegeven zijn de Fourier-coëfficiënten  $a_n = 0$ ,  $b_{n^2} = \frac{1}{n}$ ,  $b_n = 0$  als  $n$  geen kwadraat is. Teken deze functie (reken bijvoorbeeld de eerste 10 termen van de Fourier-reeks uit.) De grafiek is heel ‘scherp’ en hoekig. (Het blijkt dat deze functie oneindig veel discontinuïteiten heeft, en ook nergens een afgeleide heeft.)
4. Pas de formule van Parseval toe op de blokgolf. Welke reeks krijg je?
5. (Met piano.) Bij snaarinstrumenten dempen de hoge frequenties vaak sneller uit dan de lage. De hoogste noot van een piano klinkt bijvoorbeeld maar een seconde door, terwijl de laagste wel een halve minuut kan doorklinken (wel hard aanslaan). Voor de verschillende modes *per snaar* geldt dit ook; in het Fourierspectrum worden de lage tonen dus relatief steeds sterker. Kun je dit horen?
6. (Met piano.) Duw één toets van de piano zo langzaam naar beneden, dat de hamer de snaar niet raakt, en houd de toets vast. Hierdoor wordt de demper opgetild, en kan de snaar vrij trillen. Sla hard en kort een andere toets aan (boven of onder de vaste toets). Bij sommige toetsen hoor je een

zacht "zingen" in de ongedempte snaar. Bij welke toetsen gebeurt dit? En welke toon hoor je dan?

7. Gegeven zijn een functie en zijn Fourier-reeks:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \sin nx + a_n \cos nx)$$

- (a) Wat is de Fourier-reeks van de afgeleide  $f'(x)$ ? (Ga ervan uit dat  $f'(x)$  bestaat.)
  - (b) Stel  $f(x) = |x|$  (voor  $-\pi < x < \pi$ , en verder periodiek voortgezet). Wat is  $f'(x)$  als  $-\pi < x < 0$ ? En wat als  $0 < x < \pi$ ? Teken de grafiek van zowel  $f(x)$  als  $f'(x)$ . Bereken met behulp van het eerste onderdeel de Fourier-reeks van  $f'(x)$ , en vergelijk dit met die van de blok golf.
  - (c) Ga weer uit van een algemene functie  $f$  en zijn Fourier-reeks. Neem aan dat  $a_0 = 0$ . Wat is de Fourier-reeks van de primitieve van  $f$ ?
  - (d) Neem voor  $f$  nu de zaagtand  $f(x) = \frac{1}{2}x$ , voor  $-\pi < x < \pi$ . Bereken de primitieve  $F$  van  $f$ , en kies de integratieconstante zo dat  $F(0) = 0$ . Bereken de Fourier-reeks van  $F$  met behulp van onderdeel (c) en de gegeven reeks (1). (Let op dat de coëfficiënt  $a_0$  van  $F$  apart berekend moet worden!)
8. In deze opgave vind je drie verschillende resultaten op een nieuwe manier.
- (a) Reken de Fourier-reeks van  $f(x) = \frac{1}{4}x^2$  uit, en controleer hiermee opgave 6(d). (Hint:  $b_n = 0$ . Gebruik voor de  $a_n$  tweemaal partiële integratie.)
  - (b) Vul in  $x = 0$ . (Controle: Je vindt de reeks van opgave 2 terug.)
  - (c) Vul in  $x = \pi$ . (Controle: Hiermee vind je Euler's reeks terug.)

### Literatuur

1. A. van Rooij, *Fouriertheorie, van reeks tot integraal*, Utrecht: Epsilon Uitgaven, deel 10, 1988.