Hoofdstuk IX

Pi – ook eens anders benaderd

Jaap Top

Inleiding

Het getal $\pi = 3{,}14159265\cdots$ blijkt heel wat mensen te fascineren. Op internet is er dan ook een immense hoeveelheid informatie over te vinden. Veel aardigs, en misschien wel evenveel wat je juist niet wilt weten, vind je op het adres

http://www.go2net.com/internet/useless/useless/pi.html

Voor praktische toepassingen zal maar zelden een benadering van pi nodig zijn die beter is dan degene die op de eerste regel van dit stukje staat. De berg gegevens die we desondanks verder nog over dit getal hebben, heeft dan ook zeker bijgedragen tot de foutieve indruk, dat wiskundigen niet veel beters te doen hebben dan volkomen nutteloos al maar meer decimalen van π te produceren. Ondanks dit slechte imago willen we toch wat aandacht aan pi schenken.

Bijna iedereen weet, dat π (ongeveer???) gelijk is aan de breuk 22/7. Als je iemand wilt overtuigen dat toch beide getallen verschillend zijn, kan je ze natuurlijk op een rekenmachine van elkaar aftrekken en opmerken dat het verschil niet nul is. Maar het kan ook anders, zonder te moeten vertrouwen op een rekenapparaat. In het in 1996 verschenen boek "Notes on Fermat's Last Theorem" van Alf van der Poorten staat op bladzijde 15 de formule

$$\int_0^1 \frac{x^4(x-1)^4}{x^2+1}\,dx = \frac{22}{7} - \pi.$$

Wat je hier aan ziet, is ten eerste dat $\pi \neq 22/7$. Sterker nog, we zien dat $22/7 - \pi > 0$. Immers, dit verschil is gelijk aan de oppervlakte ingesloten door de grafiek van de functie

$$f(x) = x^4(x-1)^4/(x^2+1)$$

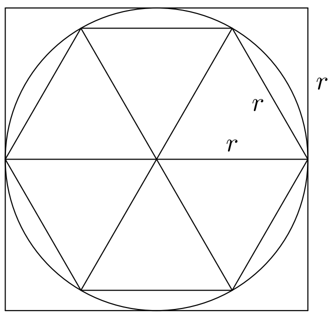
en het stukje x-as tussen 0 en 1. De gegeven grafiek vertelt ons zelfs nog meer, namelijk hoe goed de breuk 22/7 het getal π benadert. Je zou bijvoorbeeld een onder- en een bovengrens kunnen afleiden voor de gegeven oppervlakte: omdat $x(x-1)$ tussen $-1/4$ en 0 zit voor $x \in [0,1]$ (kijk maar naar de grafiek van

$x \mapsto x(x-1)$), volgt dat $f(x) \leq (1/4)^4 = 1/256$ op dit interval, dus de fout die we maken door 22/7 voor π in te vullen zit ergens tussen 0 en 1/256.

In dit hoofdstuk zullen we π op diverse manieren "benaderen", waarbij we ons niet alleen beperken tot wiskunde.

Geheel

Laten we heel letterlijk, en niet te serieus beginnen. Een gehele benadering voor π is een benadering door middel van een geheel getal. Door naar de omtrek van een ingeschreven regelmatige zeshoek en een omgeschreven vierkant van een cirkel te kijken, vind je dat $3 < \pi < 4$. Immers, die zeshoek krijg je door zes gelijkzijdige driehoeken met een zijde van lengte r als een waaier vanuit het middelpunt van de cirkel met straal r naast elkaar te leggen.



De zes koorden aan de cirkel hebben samen een lengte $6r$, en omdat zo'n koorde korter is dan het stukje cirkelboog met dezelfde eindpunten vind je zo $6r < 2\pi r$, dus $3 < \pi$. Het omgeschreven vierkant heeft oppervlakte $4r^2$, en dat is uiteraard meer dan de oppervlakte πr^2 van de cirkel. Dus $\pi < 4$. De minst belachelijke gehele benaderingen zijn dus $\pi \approx 3$ en $\pi \approx 4$.

In de bijbel kan je al vinden wat π zou moeten zijn: in de Kronieken van de koningen van Juda en Israël, tweede deel, hoofdstuk 4, tweede vers:

> *Daartoe maakte hij de gegoten zee; van tien ellen was zij, van haar enen rand tot haar anderen rand, rondom rond, en een meetsnoer van dertig ellen omving ze rondom.*

Het gaat hier dus om een rond geval met diameter 10 en omtrek 30. De conclusie hieruit is dat ofwel het geval niet precies rond was, ofwel π is precies 3.

Niet alleen in de bijbel, maar ook in de politiek zijn uitspraken over π gedaan. Een beroemde politieke beslissing waarin π een rol speelt, vind je beschreven in "Pi: a source book", een boek uit 1997 waarin Lennart Berggren, Jonathan Borwein en Peter Borwein een grote collectie al eerder over π gepubliceerde wetenswaardigheden samenbundelen. Ook is informatie over π in de politiek te vinden via de al eerder genoemde *useless pages* op internet; kijk aldaar bijvoorbeeld naar "Pi through the ages". In het jaar 1897 nam het Huis van Afgevaardigden van de Amerikaanse Staat Indiana unaniem een wet aan, waarin onder meer wordt vastgelegd dat π de waarde 4 heeft. Dit werd verwoord door te bepalen, dat de verhouding tussen oppervlakte en het kwadraat van een kwart van de omtrek bij een cirkel gelijk zou zijn aan de verhouding tussen oppervlakte en het kwadraat van de lengte van een zijde bij een gelijkzijdige driehoek. De lezer kan zelf nagaan, dat dit zou leiden tot de genoemde waarde voor π. Men was tamelijk coulant in Indiana, want aan het gebruik van 'hun' π voor bijvoorbeeld wetenschappelijke doeleinden wensten ze verder geen kosten te verbinden. De wet heeft het echter in de senaat van Indiana niet gehaald. Waarschijnlijk vanwege het feit dat de omschrijving van π in het genoemde wetsvoorstel er nogal verwarrend uitziet, is later het verhaal nogal eens verkeerd weergegeven. Zo bevatten meerdere uitgaven van het Guinness Book of Records hierover foutieve mededelingen. In een artikel in het Nieuw Archief voor Wiskunde (juli 1996) refereert D.C. van Leijenhorst naar dit boek en noemt daarbij dat π volgens een wet in Iowa(!) de waarde 4 kreeg.

Poëtisch

Hoe dicht "poëtische approximatie" je bij π kan brengen, is waarschijnlijk meer een vraag voor in filosofische beschouwingen ontaarde feestjes. Maar zelfs hier zijn weer verschillende benaderingen mogelijk. Wat te denken van een "pisonnet", oftewel een sonnet met strofen van achtereenvolgens 3, 1, 4, 1 en 5 regels. Er bestaan voorbeelden geschreven door Jacques Bens, en ook door Drs. P.:

Drie, een, vier, een en vijf... verstijft u even?
Goed – tweeëntwintig dan, gedeeld door zeven...
precies, dat is wat ik bedoelde: π.

Een Fransman wou daar een sonnet mee maken.

Die reeks vertoont wel weinig symmetrie
maar veertien in totaal is een gegeven,
twee losse regels tot refrein verheven –
zo wordt het een gedicht, wel wis en drie.

Jacques Bens wist dus een nieuw sonnet te maken.

Wie zou hiervan niet in vervoering raken?
Na twintig jaar belandt het goed en wel
in onze taal. U moet van ijver blaken
om op zo'n innovatie in te haken.
(Hij noemde die sonnet irrationnel.)

Drs. P. heeft zijn fascinatie voor pi zelfs gestalte gegeven in een lied. Men leze het kordaat, ritmisch en een weinig nasaal voor het beste resultaat:

Verleden week bezocht ik voor de eerste maal mijn bovenbuur
Het had te maken met lekkage, naar ik meen, of met de huur
Er hing een levensecht portretje van een cirkel aan de muur
En hij ontpopte zich als vreemde en ascetische figuur
Die zich in leven hield met brokjes en augurken in het zuur

Het schikt me slecht, ik moet veel werk verrichten sprak hij overstuur
Ik heb al jaren een obsessie en die geeft mij rust nog duur
Daar ik verslaafd ben aan de cirkelkwadratuur

Als men de omtrek van een cirkel, zo begon hij zijn verhaal
Gaat delen door de doorsnee, uiteraard is die twee maal de straal
Dan komt er een quotient, ja mag ik even stilte in de zaal
Vaak zeg 'k maar twee-entwintig zevende, maar dat is te globaal
In feite is het twee pi er, en dat is lang niet zo banaal
Het blijkt dat pi irrationeel is en daarbij transcendentaal
En een computer heeft het uitgerekend, is dat niet geniaal
Tot in de weet ik veel hoeveelste decimaal

Ja deze pi, dat is te lezen in de encyclopedie
Is eeuwenoud en wetenschappelijk, Grieks en vol magie
Als ik zo pieker over pi spreekt u wellicht van een manie
Maar zijn wij allen niet neuro-, fana-, roman- of mystici
Een ander heeft een kolibri een relikwie of een fobie
Maar ik verdiep mij onophoudelijk en zonder compromis
In dit unieke en verheven wonder der planimetrie
Ik zoek het antwoord op het grote raadsel pi

Na deze woorden onderbrak hij spastisch hijgend zijn gepraat
En er verscheen een onrustbarend kleurenspel op zijn gelaat
Dus ik begon al rond te kijken naar een zuurstofapparaat
Maar hij bedaarde, en hervatte zijn verhandeling kordaat
Er is een andere formule, die is ook niet van de straat
De oppervlakte van een cirkel immers is pi er kwadraat
En om de waarde van die pi nu eens te zien in vol ornaat
Dat is wat mij als ideaal voor ogen staat

Aldus vind ik drie komma een vier een vijf negen twee zes vijf
Etcetera, etcetera, ja het heeft heel wat om het lijf
Zodat ik elke morgen na het opstaan eventjes verstijf
Bij de gedachte aan de eindeloosheid van dit tijdverdrijf
Waarna ik mij toch altijd weer verman en in mijn handen wrijf
Ik grijp de rekenliniaal, maar ook wel eens de rekenschijf
Ik zet me neer en calculeer en schrijf, en calculeer en schrijf
En ik zal blijven zoeken tot ik er in blijf . . .

Het bekendst zijn natuurlijk de gedichten met achtereenvolgens woorden van 3, 1, 4, 1, 5, 9 enzovoort letters. Ze bestaan in vele talen. Wie zich er aan wil wagen, dient eerst te beslissen wat hij/zij doet met de nullen die voorkomen in de decimale ontwikkeling van π. Een voorbeeldje:

Wie π voor 't eerst berekende
hij sterft nooit. Het getal
verdient voorzeker evenzoo onthouden
dit nu zal voortaan niet zwaar of lastig gaan
wie dit onthoudt die is voldaan.

Sommige dichters zijn erin geslaagd, de leestekens precies te plaatsen op de plaatsen die bij een cijfer nul horen en verder nergens. Pas bij de 359ste en 360ste decimaal krijgen we een rijtje van twee nullen achter elkaar, dus in principe zou je een heel eind moeten kunnen komen ...

Prozaïsch

> *For a time I stood pondering on circle sizes. The large computer mainframe quietly processed all of its assembly code. Inside my entire hope lay for figuring out an elusive companion. Value: pi.*

Zo begint het spannende pi-verhaal, geschreven door de Amerikaanse wiskundige Michael Keith. Het bijzondere aan dit maar liefst 403 woorden tellende verhaal is dat de lengte van de opeenvolgende woorden precies de decimalen van π zijn. Leestekens, behalve de punt, staan voor het cijfer 0.

Jan van de Craats drukte Keith's verhaal af in een NRC-artikel van 1986, en verbond er meteen een prijsvraag aan: schrijf een Nederlands π-verhaal volgens het stramien van Keith. Prachtig proza was het resultaat. In het NRC van 18-XII-1986 is een pagina vol voorbeelden afgedrukt. Het verhaal van de prijswinnaar T. Nijzink begint zo:

> *Wel, 't werd 'n fikse puzzelarij om evenzo fraai als Keith, cijferbrij formerend talrijke decimalen van pi tot leesbaar stel zinnen te vormen, iets dat het geheugen een zo welkome ezelsbrug biedt. De gevolgde werkwijze zult u herkennen vermits ik Keith's methodiek heb nagevolgd, vertalend ons raadsel - getal* π.

In het vervolg legt Nijzink uit dat hij toch net iets andere regels gebruikt dan Keith: hij laat de punt met de 0 corresponderen, en alle andere leestekens juist met niets. En de Nederlandse diftong 'ij' is natuurlijk één letter.

Wie een eenvoudig geheugensteuntje denkt nodig te hebben voor het onthouden van 24 cijfers van π, zou de volgende zinnen handig kunnen vinden:

> *How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics. All of thy geometry, Herr Planck, is fairly hard...*

Op een grafsteen

In 1600 benoemde prins Maurits op advies van Simon Stevin de wiskundige en schermmeester Ludolf van Ceulen tot hoogleraar te Leiden. Maurits had in de tachtigjarige oorlog ingenieurs nodig, en om die te krijgen voegde hij een opleiding daarvoor toe aan de Leidse universiteit. Van Ceulen moest deze mensen in het Nederlands (Nederduits heette dat toen) gaan onderwijzen, hetgeen hem goed uitkwam omdat hij geen Latijn las of sprak.

> *... die dadelyck met Ingenieurs handel omgaen, met malcander geen latyn en spreecken oft immers seer selden, maer dat men in elck lant des landts spraecke gebruyckt. Soo en sullen deese Lessen niet in't latyn, franchoys oft ander Talen gedaen werden, maer alleenlyck in't duytsch.*

Kennelijk had de man toch nog wel wat tijd over, want hij blijft schermmeester en beklaagt zich zelfs in 1602 bij de Leidse burgemeesters over het feit, dat zijn leerling Bailly een concurrerende school begint. Hij eindigt zijn beklag met de prachtige zin

> *Biddet derhalven de suppliant ootmoedich, dewyle hy met groote laste ende veel kinderen beladen is, mijn E. Heeren willen hem in sijn gerechtichheyt voorstaen, ende verbieden den genomden Mr. Pieter sijn schermschoole.*

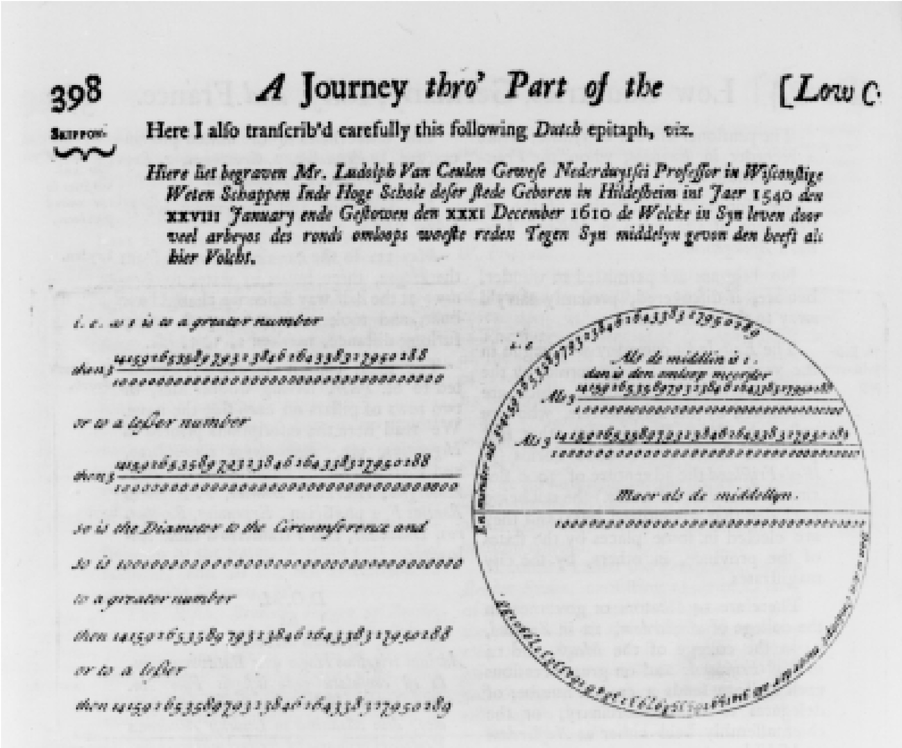
De ootmoed heeft succes, want prompt wordt de concurrent verboden

> *'tzy in 't heymelick ofte openbaer eenige schermschoole te houden*

en zelfs

> *'t school, by hem sonder wettige kennisse of toelating opgericht, te sluyten ende breecken.*

Naast schermschool, ingenieursschool en vijftien kinderen deed Van Ceulen aan pi. Zoveel zelfs, dat pi in die tijd de naam "die Ludolphsche Zahl" kreeg. In 1596 publiceerde Van Ceulen een boekje waarin hij onder meer pi tot op 20 decimalen nauwkeurig gaf. In 1603 was hij al een stuk verder, want de Deen Dybvad drukt in dat jaar 31 door Van Ceulen berekende cijfers van pi af. Op 31 december 1610 overlijdt Van Ceulen, en inmiddels had hij de eerste 35 decimalen achter de komma gevonden. Van dit staaltje wordt op zijn grafsteen in de Leidse Pieterskerk melding gemaakt. Helaas is deze steen later verdwenen, maar de tekst erop kennen we nog wel. Ironisch genoeg is daarbij een Latijnse vertaling van de graftekst het bekendst geworden; deze werd namelijk in 1712 gepubliceerd in een in Leiden uigegeven reisgids "Les Delices de Leide".



398 *A Journey thro' Part of the* [Low C

SKIPPON.

Here I also transcrib'd carefully this following *Dutch* epitaph, *viz.*

Hiere leit begraven Mr. Ludolph Van Ceulen Gewesse Nederduytsche Professor in Wiskonstige Weten Schappen Inde Hoge Schole desser stede Geboren in Hildesheim int Jaer 1540 *den* XXVIII *January ende Gestorven den* XXXI *December* 1610 *de Welcke in Syn leven door veel arbeyts des rondi omloops woeste reden Tegen Syn middelyn geven den heeft als hier Volcht.*

i. e. as 1 *is to a greater number*

then 3 $\frac{14159265358979323846264338327950288}{100000000000000000000000000000000000}$

or to a lesser number

then 3 $\frac{14159265358979323846264338327950288}{100000000000000000000000000000000000}$

so is the Diameter to the Circumference and

so is 100000000000000000000000000000000000

to a greater number

then 314159265358979323846264338327950288

or to a lesser

then 314159265358979323846264338327950289

Het grafschrift volgens Skippons reisverslag

In 1999 werd de Nederlandse tekst herontdekt tijdens het voorbereiden van een plan tot plaatsing van een gedenksteen over Van Ceulen in de Pieterskerk. Het bleek, dat de Engelsman Sir Philip Skippon, die in 1663 onder meer Leiden bezocht, in zijn reisverslag de steen vermeldt.

Vanaf juli 2000 kan een reconstructie van de tekst (weer) in de Pieterskerk worden bewonderd.

Heel nauwkeurig

De methoden waarmee men in korte tijd erg veel decimalen van π kan bepalen, grenzen aan het onwaarschijnlijke. De Japanner Kanada heeft aan de universiteit van Tokyo een eigen "laboratorium" waar hij en z'n staf zich al bijna twintig jaar lang verdiepen in het bepalen van steeds meer cijfers achter de komma bij π, en als ze dan toch bezig zijn ook maar meteen bij π^{-1}. Eind 2002 waren op het laboratorium van Kanada in het Tokyo Information Technology Center maar liefst 1.241.100.000.000 decimalen van π uitgerekend. Om twee decimalen op te slaan heb je ongeveer een byte geheugen nodig, dus een kleine rekensom leert dat je beter niet kan proberen dit hele bestand op de harde schijf van je pc weg te schrijven.

Om een indruk te krijgen van het soort technieken waarmee een dergelijke precisie haalbaar wordt, volgt hier een tamelijk eenvoudige benaderingsmethode. Voorwaarde voor het gebruik ervan is wel, dat we in heel veel decimalen nauwkeurig kunnen worteltrekken. De formules zijn ontdekt door de gebroeders Borwein uit Canada, en gepubliceerd in 1984. Een uitvoerige uitleg is te vinden in hun boek "Pi and the AGM". Ook via internet probeert Jonathan M. Borwein velen enthousiast te maken en te houden; klik in zijn homepage

http://www.cecm.sfu.ca/personal/jborwein/

maar eens op 'PI & More'. De andere (Peter) Borwein vind je overigens door in deze URL de naam 'jborwein' in 'pborwein' te veranderen.

Neem $x_0 = \sqrt{2}$, $\pi_0 = 2 + \sqrt{2}$ en $y_1 = \sqrt[4]{2}$. Vervolgens reken je nieuwe x-en, y-en en π-en uit met de formules

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_n} + \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right),$$

$$y_{n+1} := \frac{y_n\sqrt{x_n} + 1/\sqrt{x_n}}{y_n + 1}$$

en

$$\pi_n := \pi_{n-1}\frac{1 + x_n}{1 + y_n}.$$

Er geldt dat

$$|\pi_n - \pi| < 10^{-2^{n+1}},$$

met andere woorden, gemiddeld over n iteratieslagen wordt het aantal correcte decimalen minstens per slag verdubbeld! Dus bijvoorbeeld π_{19} heeft al meer dan miljoen correcte decimalen. Op de pagina's 46 t/m 48 van bovengenoemd boek van Peter en Jonathan Borwein is een bewijs te vinden voor de stelling dat inderdaad de rij $(\pi_n)_{n\geq 0}$ zo snel naar π convergeert. De hier gegeven benadering is een voorbeeld van een "kwadratische iteratie". Dit houdt in, dat inderdaad per slag het aantal correcte decimalen ongeveer verdubbeld. Zoals door de Borweins wordt afgeleid, geldt namelijk zelfs

$$|\pi_{n+1} - \pi| \leq \frac{1}{10}|\pi_n - \pi|^2.$$

Heb je dus bijvoorbeeld m correcte decimalen, dan levert de volgende slag je er zelfs minstens $2m + 1$.

Hier zijn een paar numerieke waarden die dit illustreren:

n	π_n	$\pi_n - \pi$
0	3,4142135623730950488016887	0,2726209087833018103390453
1	3,1426067539416226007907198	0,0010141003518293623280764
2	3,1415926609660442304977522	0,0000000073762509920351088
3	3,1415926535897932386457739	0,0000000000000000001831306
4	3,1415926535897932384626433	0,0000000000000000000000000

Naast deze kwadratische (tweede orde-) iteratie, zijn zelfs allerlei derde en vierde en nog hogere orde processen voor het benaderen van π bekend. Hiermee wordt dus per slag het aantal correcte decimalen verdrievoudigd of zelfs verviervoudigd. Het moge duidelijk zijn, dat daarmee het echt implementeren van een benaderingsmethode meer een probleem van data-opslag en het schrijven van algoritmen voor rekenen met hoge precisie is geworden.

Ook het nagaan of de miljarden decimalen die zo'n algoritme uiteindelijk oplevert, inderdaad de juiste zijn, is een heel probleem. Hiervoor wordt meestal met meerdere methoden, onafhankelijk van elkaar, de benadering in de vereiste precisie bepaald, en als dan deze antwoorden exact overeenkomen concludeert men dat er kennelijk(?) geen fout meer in zit.

Exact?

Het moet wel heel geruststellend voor decimalen-berekenaars zoals Kanada zijn, dat het altijd nog preciezer kan. Anders gezegd, hun computer, en geen enkele computer, zal opeens in de zoveelste iteratiestap van wat voor methode dan ook, opeens de exacte waarde van π te pakken hebben.

Een reden hiervoor is, dat hoe precies we ook rekenen, toch zal het getal dat uiteindelijk in het rekenapparaat wordt opgeslagen gewoon een breuk zijn. Dat wil zeggen, een quotient van twee gehele getallen. Immers, als de computer getallen opslaat als een stuk voor de komma en een stuk erachter, dan hebben die beide stukken een eindige hoeveelheid decimalen. En zelfs als een computer met getallen als $1/3$ exact zou rekenen, dan nog blijven het gewoon breuken. Hiermee krijgen we niet π, want dat is geen breuk. Niet $22/7$ zoals we al zagen, maar evenmin welk ander rationaal getal dan ook. Dit is een resultaat van Lambert uit 1771. Een kort bewijs hiervoor, afkomstig van Ivan Niven uit 1947, is te vinden via de al vaker genoemde homepage van Jonathan Borwein. We geven hier een kleine variatie op dit bewijs; in het boek "Pi and the AGM" komt dit als opgave voor.

We beginnen met de functie

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!},$$

waarin n een vast, willekeurig, positief geheel getal is. Op de constante $n!$ na is dit gewoon de $n$de macht van $g(x) = x - x^2$. Deze $g(x)$ heeft als grafiek een bergparabool met symmetrie-as $x = 1/2$ en nulpunten $x = 0$ en $x = 1$. In het bijzonder volgt hieruit, dat $f(x) = f(1-x)$, en op eventueel een teken ± 1 na heeft f en elke hogere afgeleide ervan dus in $x = 0$ dezelfde waarde als in $x = 1$. Deze waarde blijkt een geheel getal te zijn. Dit zie je bijvoorbeeld door f wat verder uit te werken:

$$f(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{n+k}.$$

Om daarvan een $m$de afgeleide in $x = 0$ uit te rekenen, hoef je in feite alleen maar te weten dat als je die uitrekent voor de functie x^{n+k}, het antwoord 0 is als $m \neq n+k$ en $m!$ als $m = n+k$. Voor de functie $f(x)$ is die $m$de afgeleide in $x = 0$ dus 0 als $m < n$ en als $m > 2n$. En voor $n \leq m \leq 2n$ krijgen we als antwoord

$$(-1)^{m-n}\binom{n}{m-n}m!/n!,$$

hetgeen inderdaad een geheel getal ($\neq 0$) is.

Tot hiertoe zien we nog geen π in dit argument. Deze zit in de functie $F(x)$, die we als volgt introduceren: $F(x) :=$

$$\pi^{2n}f(x) - \pi^{2n-2}f''(x) + \pi^{2n-4}f^{(4)}(x) - \ldots + (-1)^{n-1}\pi^2 f^{(2n-2)}(x) + (-1)^n f^{(2n)}(x).$$

Van deze functie zullen we twee eigenschappen nodig hebben. Ten eerste is $F(x)$ opgebouwd uit afgeleiden van f, en daarvan weten we dat de waarden in $x = 0$ en in $x = 1$ gehele getallen zijn. Zou π een rationaal getal zijn, dan natuurlijk π^2 evenzo, dus $\pi^2 = a/b$ voor zekere positieve gehele a, b. Door naar de uitdrukking voor $F(x)$ te kijken, zie je dan dat $b^nF(0)$ en $b^nF(1)$ ook gehele getallen zijn. De andere eigenschap van $F(x)$ die we gaan gebruiken, gaat over de tweede afgeleide $F''(x)$. Merk allereerst op, dat $f(x)$ een veelterm van graad $2n$ is, dus in het bijzonder zijn alle $m$de afgeleiden met $m > 2n$ van $f(x)$ gelijk aan 0. Hiermee zien we dat

$$F''(x) = \pi^{2n}f''(x) - \pi^{2n-2}f^{(4)}(x) + \ldots + (-1)^{n-1}\pi^2 f^{(2n)}(x).$$

Tussen F en F'' volgt de relatie

$$\pi^2 F(x) + F''(x) = \pi^{2n+2}f(x).$$

Veronderstel nu, dat toch zou gelden $\pi^2 = a/b$ met a, b positieve gehele getallen. We kijken dan naar de integraal

$$b^n\pi^{2n+2}\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,dx = b^n\int_0^1 \left(\pi^2F(x)\sin(\pi x) + F''(x)\sin(\pi x)\right)\,dx.$$

De te integreren functie in die laatste uitdrukking is precies de afgeleide van $F'(x)\sin(\pi x) - \pi F(x)\cos(\pi x)$, zoals gemakkelijk is na te rekenen. En daarmee is de integraal te bepalen; we vinden

$$b^n\pi^{2n+2}\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,dx = \pi b^nF(0) + \pi b^nF(1),$$

kortom het antwoord is van de vorm π maal een geheel getal. Dit is echter onmogelijk. Immers, de functie $f(x)\sin(\pi x)$ is positief voor $0 < x < 1$, dus de integraal is ook positief, maar heel klein. Dit komt omdat $f(x)\sin(\pi x)$ kleiner is dan $1/n!$ op het interval $[0,1]$, dus de integraal is kleiner dan $\pi^2 a^n/n!$, en dit wordt willekeurig klein als we n maar groot genoeg nemen. Dus ons antwoord is enerzijds heel klein en positief; anderzijds een geheel veelvoud van π. Dit kan natuurlijk niet, dus kennelijk is onze veronderstelling dat π^2 toch een breuk zou zijn, onjuist.

We hebben nu een bewijs gegeven voor het feit, dat π geen rationaal getal is. Met behulp van pakketten voor symbolisch rekenen, kan je tegenwoordig niet alleen exact werken met breuken, maar ook met bijvoorbeeld wortels uit breuken, en meer algemeen zelfs een beetje met “algebraïsche” getallen (dat zijn nulpunten van veeltermen met gehele coëfficiënten). Het zou dus denkbaar zijn, dat een proces zoals de kwadratische iteratie die hierboven beschreven werd, toch na eindig veel stappen pi exact te pakken heeft. Maar ook dat is niet het geval. Alle getallen die namelijk in het beschreven proces optreden, zijn verkregen uit gehele getallen door herhaald wortels trekken, optellen, delen en vermenigvuldigen. Hieruit volgt, dat het allemaal algebraïsche getallen zijn. Lindemann bewees in 1882 dat π *niet* algebraïsch is, dus die kunnen we in onze iteratie niet tegenkomen. Helemaal voorin het boekje “Transcendental Number Theory” van Alan Baker staat een bewijs (afkomstig van David Hilbert) voor dit niet algebraïsch zijn, dat nauwelijks meer dan een bladzij beslaat maar toch aanzienlijk moeilijker is dan de inhoud van ons betoog.

Rationaal

Er is heel wat wiskunde ontwikkeld rond de vraag, hoe goed je een gegeven reëel getal α door een breuk p/q kan benaderen. Ten eerste kan dat natuurlijk zo precies als je maar wilt: hou de eerste zoveel cijfers achter de komma in de schrijfwijze van α als “kommagetal”, en wat je overhoudt is een breuk die α heel nauwkeurig benadert. Maar het nadeel van deze benaderingen is, dat in het algemeen hier de nauwkeurigheid maar zo goed is als het aantal cijfers in de noemer. Dit kan stukken beter; zo kan je met behulp van zogeheten “kettingbreuken” rationale benaderingen vinden die ongeveer twee keer zoveel cijfers achter de komma precies hebben als er cijfers in de noemer van de breuk zitten. Voorbeelden van zulke benaderingen voor π zijn 22/7, 333/106, 355/113, 103993/33102, 104348/33215. De laatste noemer is een getal van 5 cijfers, en zoals aangekondigd klopt de benadering tot op 10 cijfers met π.

We gaan nu een manier geven om heel veel rationale benaderingen voor π te vinden. De methode gebruikt integralen; de functies die hier geïntegreerd dienen te worden zijn eenvoudig genoeg om met de hand of met een computeralgebra-pakket als Reduce of Maple uitgerekend te worden. Dit levert uitgebreide mogelijkheden tot zelf experimenteren!

We gaan van start met de formule

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{x^2+1}\, dx.$$

Noteer dan

$$f(x) = \frac{4}{x^2+1}.$$

Als we bij $f(x)$ een functie $\delta(x)$ optellen die heel klein is op het interval $[0,1]$, dan is

$$\int_0^1 (f(x)+\delta(x))dx$$

ongeveer gelijk aan π. De uitkomst van zo'n integraal benadert dus π, en wat we nog wensen is dat die benadering een rationaal getal is. Een klasse van functies g met de eigenschap

$$\int_0^1 g(x)\, dx \in \mathbb{Q}$$

vormen de veeltermen

$$g(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,$$

waarbij alle a_i zelf ook rationaal zijn. Immers, voor zo'n veelterm g geldt

$$\int_0^1 g(x)\, dx = a_n/(n+1) + a_{n-1}/n + \ldots + a_1/2 + a_0,$$

en dat is een rationaal getal. We gaan daarom eisen, dat $f(x)+\delta(x)$ zo'n veelterm is. Schrijf $\delta(x)$ als een teller $t(x)$ gedeeld door de noemer $1+x^2$, en je ziet dat we precies willen dat $t(x)+4$ zelf een veelterm is, die bovendien deelbaar is door $1+x^2$. Nog weer anders gezegd: de teller $t(x)$ van

$$\delta(x) = \frac{t(x)}{x^2+1}$$

moet bij deling door x^2+1 als rest -4 opleveren. Wie complexe getallen kent, kan dit nog weer anders zeggen: als je in $t(x)$ voor x de waarde $x = i = \sqrt{-1}$ invult, moet je als waarde -4 krijgen.

En bovendien, om de benadering een goede te laten zijn, zal die $t(x)$ klein moeten zijn op het interval $[0,1]$.

We geven twee voorbeelden van zulke veeltermen $t(x)$. Als eerste voor de hand liggende voorbeeld: probeer $t(x) = cx^k$. Dat levert de gewenste rest -4 als we bijvoorbeeld kiezen $k = 4n$ en $c = -4$. De benadering van π die daarmee correspondeert is

$$\begin{aligned} p_n &= \int_0^1 \frac{4-4x^{4n}}{x^2+1}\,dx \\ &= 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{8}{16k^2-16k+3}. \end{aligned}$$

Wat je hier in feite doet, is de functie $1/(x^2+1)$ vervangen door $1-x^2+x^4-\ldots-x^{4n-2}$. Het verschil tussen beide integralen is dan $\int_0^1 \frac{4x^{4n}}{x^2+1}\,dx$. Dit is een positief getal kleiner dan $\int_0^1 4x^{4n}\,dx = 4/(4n+1)$. Anders geschreven, $-4/(4n+1) < p_n - \pi < 0$. De benadering lijkt daarmee tamelijk slecht (en dat is hij ook), maar toch gaat voor n naar oneindig de fout naar 0. De zo verkregen benaderingen p_n worden toegeschreven aan James Gregory (17de eeuw). Hoe oud de benaderingen ook zijn, toch kwamen ze de afgelopen jaren opnieuw in het wetenschappelijke nieuws. De reden daarvoor is, dat de gemaakte fout een merkwaardige decimale ontwikkeling blijkt te hebben. Als illustratie hiervan:

$$\begin{aligned} p_{100000} &\approx 3{,}14158765358979326971264338 2\cdots\cdots, \\ \pi &\approx 3{,}14159265358979323846264338 3\cdots\cdots. \end{aligned}$$

Je ziet, dat het vijfde en zesde cijfer achter de komma al verschilt. Maar daarachter komen weer rijtjes cijfers die wel hetzelfde zijn! Beide getallen, en daarmee ook hun verschil, hebben we gegeven als integraal over het interval $[0,1]$. Met behulp hiervan is een verklaring voor het verrassend overeenkomen van deze getallen te vinden.

Als tweede voorbeeld voor rationale benaderingen nemen we polynomen $t(x)$ die niet alleen voor $x=0$ maar ook voor $x=1$ een nulpunt hebben (ze moeten per slot van rekening kleine waarden aannemen op $[0,1]$, dus nul zijn aan de uiteinden lijkt een goed begin). Aan de voorwaarde dat de rest bij deling door x^2+1 gelijk aan -4 moet zijn, is voldaan wanneer we kiezen $t(x) = x^{4n}(x-1)^4$. En jawel, voor $n=1$ herkennen we dit uit de inleiding van dit hoofdstuk; het geeft een integraal die de benadering 22/7 oplevert. Merk op, dat we de zaak zo hebben ingericht, dat $\int_0^1 \frac{4+t(x)}{x^2+1}\,dx = q_n \in \mathbb{Q}$, of anders geschreven,

$$\int_0^1 \frac{x^{4n}(1-x)^4}{x^2+1}\,dx = q_n - \pi.$$

Elk redelijk computeralgebra-pakket kan zo'n integraal voor vaste n exact bepalen, en levert dus in het bijzonder de benaderingen q_n. Een tamelijk ruwe afschatting geeft al $0 \le x^{4n}(1-x)^4 < n^{-4}/50$ voor $x \in [0,1]$, en daarmee $0 < q_n - \pi < n^{-4}/50$. De $n$de benadering q_n is 'dus' aanmerkelijk nauwkeuriger dan Gregory's p_n.

Omdat $4+x^{4n}(1-x)^4 = (x^2+1)(x^{4n+2}-4x^{4n+1}+5x^{4n})+4-4x^{4n}$, volgt de formule

$$q_n = p_n + \frac{16n^2+24n+20}{(2n+1)(4n+1)(4n+3)}.$$

Bijvoorbeeld is

$$q_{100000} \approx 3{,}14159265358979355\cdots\cdots,$$

en dat verschilt pas in het 16de cijfer achter de komma van π.

Je kan zelf heel veel experimenteren met nog andere benaderingen voor $4/(x^2+1)$. Zo heb ikzelf een tijdje gezocht naar een functie, waarmee je eenvoudig kan zien dat $\pi \neq 355/113$ (op dezelfde manier als hoe we in dit verhaal aantonen dat $\pi \neq 22/7$). Echter, een net zo eenvoudig voorbeeld als bij 22/7 heb ik niet kunnen vinden. Als dat een van de lezers wel lukt, hoor ik het graag!

Zestientallig

Een van de grote problemen waarmee decimalen producerende lieden als Kanada kampen is, dat om bijvoorbeeld de miljardste decimaal van pi te vinden, men ook moet rekenen met een precisie van minstens zoveel cijfers. Dat lijkt logisch en onvermijdelijk. Het kwam dan ook als een behoorlijke verrassing, toen in 1997 een manier gevonden werd waarmee je een willekeurig "cijfer" in de zestientallige ontwikkeling van pi kan vinden zonder hoge precisie nodig te hebben, en zelfs zonder dat tegelijkertijd de voorafgaande cijfers bepaald worden. We proberen kort hier iets van uit te leggen.

In het ons bekende decimale stelsel betekent de notatie 3,14159 dat we het hebben over drie eenheden, plus een tiende, plus vier honderdsten enzovoort. Dus

$$3{,}14159 = 3\cdot 1 + 1\cdot 10^{-1} + 4\cdot 10^{-2} + 1\cdot 10^{-3} + 5\cdot 10^{-4} + 9\cdot 10^{-5}.$$

Kortom, we schrijven het getal als een som van machten 10^k, die we dan met een getal tussen 0 en 9 vermenigvuldigen. Het zestientallig stelsel, en ieder andertallig stelsel op een analoge manier, krijg je door de rol van 10 door 16 te vervangen, en dan getallen tussen 0 en 15 als "cijfers" toe te laten. Als voorbeeld nemen we onze 3,14159. Dat begint met 3 enen, dus $3\cdot 16^0$. We houden dan nog 0,14159 over, en kijken eerst hoeveel 16^{-1} daarin zit. Dat is bijvoorbeeld te vinden door het getal met 16 te vermenigvuldigen en dan het aantal gehelen erin te bepalen; je vindt er 2. Nu het volgende cijfer. Dit kan netzo gevonden worden, of ook direct uit het oorspronkelijke getal: vermenigvuldig met 16^2, kijk naar het aantal gehelen, en neem daarvan de rest bij deling door 16. Dit levert een 4. Zo doorrekenend vind je 3,243[15]..., oftewel ons getal begint als

$$3 + 2\cdot 16^{-1} + 4\cdot 16^{-2} + 3\cdot 16^{-3} + 15\cdot 16^{-4} + \ldots$$

Een formule voor pi die gebruikt kan worden om snel de zestientallige cijfers te bepalen, blijkt te zijn

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right).$$

Eerst gaan we na, waarom deze formule juist is. Er staat een uitdrukking voor pi als som van een paar reeksen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n(8n+m)},$$

met $m \in \{1,4,5,6\}$. Dit gaan we als integraal schrijven, en daarvoor gebruiken we dat

$$\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} x^{8n+m-1}\,dx = (\sqrt{2})^{-m} \frac{1}{16^n(8n+m)}$$

zoals eenvoudig is na te rekenen. Hieruit volgt, dat

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n(8n+m)} &= (\sqrt{2})^m \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} x^{8n+m-1}\,dx \\ &= (\sqrt{2})^m \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{x^{m-1}}{1-x^8}\,dx. \end{aligned}$$

Als we dit invullen in de uitdrukking die gelijk zou moeten zijn aan pi, dan staat er

$$\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1-x^8}\,dx.$$

Hiervan kan een computeralgebra-pakket je direct vertellen, dat de waarde inderdaad π is. Je kan het ook zelf narekenen; de substitutie $x = y/\sqrt{2}$ laat de integraal overgaan in de iets simpeler gedaante

$$\int_0^1 \frac{4 - 2y^3 - y^4 - y^5}{1 - y^8/16}\,dy,$$

en met breuksplitsen is deze dan te bepalen.

Uit de hier gekregen uitdrukking voor pi moet dan vervolgens het zoveelste "cijfer" achter de komma in de zestientallige ontwikkeling worden gevonden. Laten we zeggen dat we het $d$de cijfer wensen te vinden. Dit halen we uit het $d$de plus misschien het $d+1$ste cijfer van elk van de sommen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n(8n+m)}.$$

En om dat te vinden, moeten we zoals we al in het gegeven voorbeeldje zagen, het gehele deel van

$$16^d \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n(8n+m)}$$

modulo 16 bepalen. Hiervoor is maar een klein stuk van de oneindige som van belang. Bovendien komen daar ook nog eens gehele delen van uitdrukkingen

$$\frac{16^k}{8n+m}$$

in voor, en die zijn erg snel te bepalen door op een handige manier 16^k modulo $8n+m$ uit te rekenen. De precieze details hiervan laten we voor wat ze zijn.

Op de al eerder genoemde web site van Peter Borwein zijn implementaties van deze methode in programmeertalen als C en Fortran te vinden. Hiermee kan zelfs op een kleine personal computer in heel redelijke tijd bijvoorbeeld het tienmiljardste zestientallige cijfer van π worden bepaald.

Het moet voor iemand als de Japanner Kanada toch wel lichtelijk enerverend zijn, dat dit zo gemakkelijk kan. Immers, als het iemand zou lukken een net zo eenvoudig algoritme te vinden voor een willekeurige decimaal van pi, dan is daarmee veel van zijn immense hoeveelheid rekenwerk overbodig geworden. Maar dat was het misschien toch al wel, en bovendien kennen we (nog) niet zo'n decimaal algoritme...

Literatuur

1. Frits Beukers, *Pi*, Utrecht: Epsilon Uitgaven, Zebra deel 6, 2000.
2. R.M.Th.E. Oomes, J.J.T.M. Tersteeg, J. Top, *Het grafschrift van Ludolph van Ceulen*, Nieuw Archief voor Wiskunde 5de serie deel 1 (2000), 156–161.
3. Paul Bastiaansen, *De magie van* π, Natuur & Techniek 68e jaargang, juni 2000, 42–45.