Hoofdstuk X

Ludolph van Ceulen en de uitdaging van de wiskunde

Henk J.M. Bos

Op 5 juli 2000 onthulde Zijne Koninklijke Hoogheid Prins Willem Alexander in de Pieterskerk in Leiden de gedenksteen voor Ludolph van Ceulen. Hieronder staat de tekst van de lezing die Henk Bos voorafgaande aan de onthulling uitsprak met de titel "De cirkel gedeeld, de omtrek becijferd en pi gebeiteld: Ludolph van Ceulen en de uitdaging van de wiskunde". Deze is eerder verschenen in het Nieuw Archief voor Wiskunde, vijfde serie, deel 1, nummer 3, september 2000, 259–262.

Koninklijke Hoogheid, Dames en Heren, het is een wonderlijk lot dat Ludolph van Ceulen getroffen heeft: de geschiedenis heeft hem gereduceerd tot de man die het getal pi berekende tot op 35 decimalen nauwkeurig, en het resultaat liet beitelen op zijn grafsteen.

Ludolph gebruikte de methode waarmee Archimedes een kleine 2000 jaar eerder twee decimalen had berekend. Het is dan ook vooral Ludolph's doorzettingsvermogen dat aanspreekt, niet zijn originaliteit — "stalen ijver" schreef een negentiende-eeuwse biograaf. Het heeft hem de eer opgeleverd dat men het getal pi soms het 'Ludolphiaanse getal' noemt; het heeft hem ook de dubieuze dienst gedaan dat zijn naam het beeld oproept van de cijferaar, de rekenfreak. Dat stereotiepe beeld roept weer een vraag op: Wat brengt iemand er toe om zo lang door te rekenen? Om direct nut ging het niet; voor de precisie van het rekenwerk waren toen tien decimalen meer dan genoeg. Wat lag er voorbij die precisie? Wat zocht hij daar? Wat trok hem?

Schermleraar en Rekenmeester

Ludolph rekende niet zomaar. Het rekenen was onderdeel van een veelzijdige carrière. Hij was zoon van een koopman uit Hildesheim in Duitsland (niet uit Keulen!). Na een start waarvan we niet veel weten trok hij naar de Nederlanden. De jonge republiek had zich militair in Holland en Zeeland veilig gesteld en stond aan het begin van een onstuimige, vooral op handel gebaseerde, economische expansie.

FIGUUR 1: LUDOLPH VAN CEULEN, PORTRET OP TITELPAGINA VAN *Van den Cirkel, 1596.*

In 1580 woonde Ludolph al enige jaren in Delft; hij was toen 40 jaar oud, werkzaam in twee beroepen: schermleraar en rekenmeester.

Die twee bezigheden lagen minder ver uiteen dan men zou denken. De jonge zonen van de nieuwe bovenklasse moesten kunnen rekenen voor het familiebedrijf en schermen voor de goede manieren.

In 1596 verschijnt zijn boek *Van den Circkel*. Daarin staat zijn eerste pi-berekening, tot op 20 decimalen. In het jaar 1600 werd Ludolph, inmiddels naar Leiden verhuisd, benoemd als wiskunde-docent aan de nieuwe Ingenieurs-opleiding. Deze opleiding was op initiatief van Prins Maurits aan de Leidse universiteit verbonden om een Nederlands corps van ingenieurs op te leiden. Ludolph gaf daar les tot zijn dood in 1610.

Een gerespecteerd burger met een veelzijdige werkkring, en daarnaast een rijk en zonder twijfel druk gezinsleven; toen hij in 1590 trouwde met Adriana Simons bracht hijzelf 5 kinderen uit een eerder huwelijk mee, en zij 8; daarna werden nog zeker twee kinderen in huize van Ceulen geboren.

Grootschalig rekenen

Ludolph's wiskundige specialisme was wat we nu *grootschalig rekenen* zouden noemen.

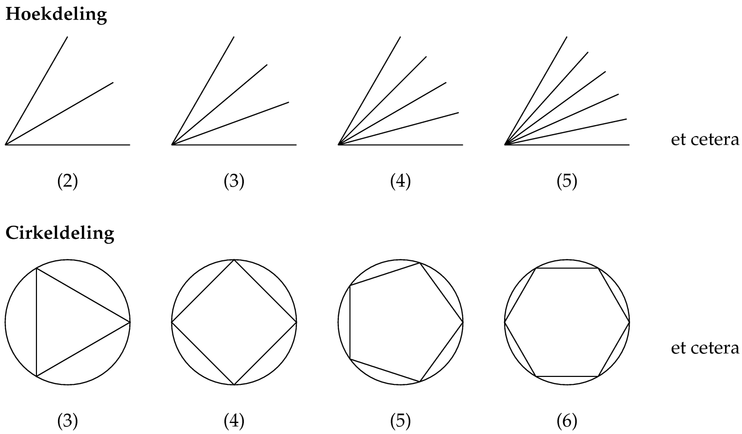
Dit grootschalig rekenen had een solide bestaansgrond: het was nodig omdat de aarde rond is, en omdat de zon, de aarde, de maan, de planeten en de sterren alle om elkaar heen draaien. Die omstandigheid bepaalt de dagen, de seizoenen, het levensonderhoud, de maatschappelijke structuren enzovoorts. Voor alle beschavingen waar wij van weten was het begrijpen en voorspellen van die bewegingen een eerste levensbehoefte. Het was ook het eerste maatschappelijke probleemgebied dat ontsloten werd door geavanceerde, door specialisten ontwikkelde wiskunde. Dat gebeurde zo'n tweeduizend jaar vóór Ludolph's tijd, binnen de astronomie. De sleutel was de meetkunde van cirkels en hoeken, de goniometrie en de trigonometrie, het rijk van die drie schikgodinnen van de periodieke verschijnselen in deze wereld, de *sinus*, de *cosinus* en de *tangens*.

In Ludolph's tijd had die tak van wiskunde een nieuwe urgentie gekregen: De ontdekkings- en handelsreizen naar nieuwe continenten vereisten meer en preciezer rekenwerk. Stuurlui moesten steeds weer en steeds vaker de hoeken, die ze aan de hemel met de jakobs-staf maten, omrekenen in plaatsen en koersen op zee. De formules daarvoor stonden vol met sinussen. Dus waren er sinustabellen nodig en, zo mogelijk, trucs die het rekenwerk verminderden. Die tabellen moesten berekend worden en de trucs moesten gevonden en onderwezen worden. Dat was het werk van een kleine groep professionele experts, de wetenschappelijke top van het grootschalig rekenen. Ze werkten in astronomische observatoria, aan universiteiten en, zoals Ludolph, in de onderwijspraktijk.

Ludolph's berekeningen van pi in een record aantal decimalen behoorden tot wat je zou kunnen noemen de virtuoze marge van dit wetenschapsgebied. Ze hadden vooral een *public relations* functie; ze toonden Ludolph's professionaliteit en leverden hem faam en klanten.

Maar pi was *niet* het centrale probleem van het grootschalig rekenen; dat was het berekenen van de sinus-tabellen. Die berekeningen waren gebaseerd op de zogenaamde hoekdeling en de cirkeldeling [Figuur 2]: Het verdelen van een hoek in 2, 3, 4, et cetera gelijke delen, of het verdelen van de hele cirkel in gelijke delen, met als resultaat de regelmatige 3-, 4-, 5-, enzovoorts -hoeken in de cirkel. De rest was rekenen, grootschalig rekenen.

Het top-onderzoek richtte zich hierop, en er was in dat onderzoek ook nieuws te beleven. Twee nieuwe dingen in het bijzonder: *irrationale getallen*

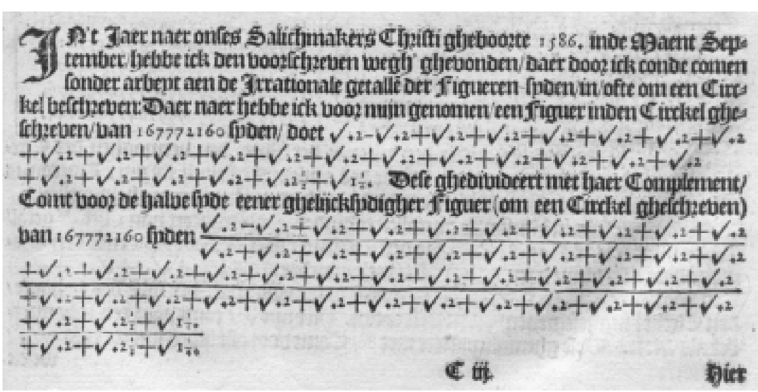


Figuur 2: Hoek- en cirkeldeling.

en *algebra*. Ludolph werkte ook aan deze nieuwe dingen en toonde daarbij dat hij, naast stalen ijver, ook inventiviteit bezat.

Irrationale getallen

Irrationale getallen hadden met worteltrekken te maken. Om sinus-tabellen te berekenen was het namelijk nodig wortels te trekken, en wel ontzettend vaak, en met veel decimalen achter de komma. Om dat vele rekenen te overzien was het handig het feitelijke rekenwerk eerst uit te stellen. Je schreef dan alleen $\sqrt{2}$ of $\sqrt{3}$, of ingewikkelder bijvoorbeeld: $\sqrt{3+\sqrt{2}}$. Aan het eind had je dan een formule die een goed overzicht gaf van het rekenwerk dat nog gebeuren moest. Die wortels die je niet uitrekende maar opschreef met een wortel-teken werden irrationale getallen genoemd. Ze waren nieuw en omstreden, er waren namelijk geleerden die meenden dat ze helemaal niet bestonden.



IN't Jaer naer onses Salichmakers Christi gheboorte 1586. inde Maent September hebbe ick den voorschreven wegh ghevonden/ daer door ick conde comen sonder arbeyt aen de Irrationale getallē der Figueren-syden/ in/ ofte om een Cirkel beschreven: Daer naer hebbe ick voor myn genomen/ een Figuer inden Circkel gheschreven/ van 16777216o syden/ doet √.2−√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2½+√1¼. Dese ghedivideert met haer Complement/ Comt voor de halve syde eener ghelijckzydigher Figuer (om een Circkel gheschreven) van 16777216o syden √.2−√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2 ...

C iij. Hier

Figuur 3: Formule's uit *Van den Cirkel* (p. 11 recto).

Ludolph accepteerde ze enthousiast. Hij kon er formules mee opschrijven voor zijn berekeningen van pi. In figuur 3 ziet U zo'n formule uit zijn boek *Van den Cirkel*. In de nu gebruikelijke notatie ziet dit soort formules er als volgt uit:

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}};$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\frac{1}{2}+\sqrt{1\frac{1}{4}}}}}}}}.$$

Wiskundige formules hebben een typografische esthetiek die te genieten is zonder de betekenis van de formule te begrijpen. Merkwaardigerwijs loopt die esthetiek vaak parallel met de betekenis van de formule: mooie formule: boeiende wiskunde; lelijke formule: vervelende wiskunde. Die in elkaar geschakelde wortels zien er fraai uit; ze houden een uitdaging in: wat zit er achter? Ludolph was niet de enige die die uitdaging voelde. François Viète, de topman van het vakgebied in die tijd, heeft een formule voor pi op zijn naam staan waar dezelfde wortelschakeling in voorkomt. Die staat ook op het plaatje. Viète doorzag de formules wat beter dan Ludolph, maar Ludolph's verkenningen kwamen toch dicht bij waar toen de grenzen van het top onderzoek lagen.

Algebra

En dan de algebra. Algebra, Hoogheid, Dames en Heren, gaat met x. Als je een som hebt en je ziet niet meteen welk getal er uit komt, doe dan net of je dat getal best weet, noem het x, en ga ermee rekenen. Soms krijg je dan het antwoord cadeau, en zo niet dan leert dat rekenen met x je toch vaak wat nieuws over je probleem. In Ludolph's tijd was deze aanpak nog nieuw, en heel fascinerend. Er zit ook iets magisch achter, want hoe kun je nou een probleem oplossen door net te doen alsof je het antwoord al weet? Het wonder van de algebra!

Rekenen met x leidt tot vergelijkingen. Eenvoudige vergelijkingen had men in Ludolph's tijd leren oplossen. De hoek- en de cirkeldeling leverden nieuwe, speciale vergelijkingen. Viète bijvoorbeeld, vond de vergelijkingen

$$\begin{aligned}
x &= C\\
2-x^2 &= S\\
3x-x^3 &= C\\
2-4x^2+x^4 &= S\\
5x-5x^3+x^5 &= C\\
2-9x^2+6x^4-x^6 &= S\\
7x-14x^3+7x^5-x^7 &= C\\
2-16x^2+20x^4-8x^6+x^8 &= S\\
9x-30x^3+27x^5-9x^7+x^9 &= C
\end{aligned}$$

Ze beschrijven de deling van een hoek in 2, 3, 4, et cetera gelijke delen. Weer zijn het typografisch aantrekkelijke vergelijkingen, ze dagen uit: is er regelmaat in de getallen die er staan? Die regelmaat is er inderdaad en Viète werkte die nader uit. Dat was het begin van de theorie van de cirkeldelingsvergelijkingen, een theorie die nu nog een belangrijk onderdeel van de moderne algebra vormt.

Ook Ludolph was gefascineerd door vergelijkingen. Op aandrang van Adriaan van Roomen, een andere top-man van het grootschalig rekenen, nam hij op zich om de zijden te berekenen van de regelmatige 3-, 4-, 5-, et cetera tot en met de regelmatige 80-hoek in 14 decimalen nauwkeurig. Aan dat project heeft hij denkelijk langer, en zeker slimmer, gerekend dan aan pi. Hij gebruikte daarbij ook cirkeldelingsvergelijkingen, maar andere dan Viète. Zijn vergelijkingen voor de 34-hoek is:

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + x}}}};$$

de 38-hoek:

$$\begin{aligned} 5x - 5x^3 + x^5 &= \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}} \\ 9x - 30x^3 + 27x^5 - 9x^7 + x^9 &= \sqrt{2 - x}; \end{aligned}$$

de 158-hoek:

$$5x - 5x^3 + x^5 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 - x}}}}.$$

Weer kan ik aan de hand van de typografie van de formules laten zien wat er gaande was. Links staan stukken vergelijkingen die Viète ook al gevonden had. Rechts staat Ludolph's specialiteit, zijn handtekening als het ware, de geschakelde wortels.

Zo kwam Ludolph, via de cirkeldeling, een nieuw gebied van algebra binnen dat hij enthousiast verkende en waar hij allerlei suggestieve verbanden vond.

De voorbeelden maken duidelijk dat Ludolph meer deed dan decimalen berekenen van pi; hij functioneerde professioneel in een prominente tak van wiskunde. Hij werkte op internationaal niveau; maar hij leverde geen doorbraken. Hij was inventief maar niet innovatief. Een verdienstelijk, en vooral ook een enthousiast wiskundige.

En een onvermoeibaar rekenaar. Want Ludolph was wel degelijk trots op zijn 35 decimalen en hij schreef vaak over het plezier dat hij beleefde aan het rekenen. Over zijn project om de zijden van de 3-, 4-, 5-, enzovoorts tot en met de 80-hoek te berekenen schreef hij:

> [toen is . . .] *my sulcken lust ende begheerte aengecomen, om de voorschreven ghetallen soo naer te soecken, als boven begheert:* [. . . namelijk met 14 cijfers achter de komma . . .] *dat ick den grooten arbeyt niet achtede, ben met een sterck voornemen daer aenghevallen (ende alle swaericheydt aen een syde gheset, daer ick mede beladen was) ende niet gherust, voor ick (met*

> *Godts hulpe) ghevonden hadde, het ghene van my begheert was* [...].

De uitdaging van de wiskunde

En daarmee zijn we terug bij de vraag die ik aan het begin stelde: Wat brengt iemand er toe om zo lang door te rekenen? Wat zocht Ludolph? Wat was de uitdaging?

Er zijn twee elementen uit het verhaal die een aanknopingspunt leveren hierover, de grafsteen en het rekenen. Ludolph was niet de eerste die een wiskundig resultaat op zijn grafsteen liet beitelen — Archimedes, zijn grote voorbeeld, had dat ook gedaan. In Archimedes' geval betrof het een schitterend nieuw resultaat over bollen en cilinders. Er is een opmerking van Archimedes over die vondst bewaard gebleven die naar mijn gevoel iets wezenlijks over de uitdaging van wiskunde weergeeft. Hij schreef dat de eigenschappen van de bol en de cilinder die hij ontdekt had, inherent zijn aan de natuur van die figuren, en daarom altijd waar zijn geweest, ook voordat hij ze, als eerste, ontdekte.

Archimedes onderstreepte daarmee natuurlijk zijn prioriteit. Maar de opmerking zegt ook iets over de wiskundige bezigheid. En dat is het gevoel dat wat je ontdekt in de wiskundige dingen er van tevoren al was, dat het tijdloos is en ook precies zo moet zijn als je het aantreft. Voor die ervaring van tijdloze noodzakelijkheid doet het er overigens niet toe of het stukje wiskunde dat je bekijkt nieuw is of al eerder door anderen ontdekt. Het doet er ook niet toe of je meteen ziet waaròm de dingen zo zijn als je ze aantreft. Integendeel, vaak zijn ze nog niet echt duidelijk, maar dáárom juist uitdagend en verleidelijk: ze kunnen namelijk duidelijk worden.

En dan Ludolph's rekenen. Bij het getal pi rekende hij vèr voorbij de noodzaak van praktische precisie. Hij liet dus iets los, namelijk zingeving. Dat is natuurlijk ook waarom zijn rekenlust zoveel verbazing wekt, men denkt: dat heeft geen zin meer. Ook bij Ludolph's cirkeldeling wordt iets losgelaten: De zevenhoek is concreet voorstelbaar, de 15-hoek ook nog wel, maar de 158 hoek? Daar verdwijnt de voorstelbaarheid, het gevoel dat je met een grijpbaar, op z'n minst mentaal grijpbaar, object te maken hebt. Er blijft alleen een *regel* over: 158 gelijke zijden in een cirkel. Dat loslaten vereist durf, want wat voor vaste grond heb je dan nog onder de voeten? Je moet, als een koorddanser, geen hoogtevrees hebben als je zo de rekenregels volgt voorbij de grens van hun concrete zin en betekenis. Je abstraheert dan, je laat je leiden door het redeneren zelf; je houvast ligt in het volgen van de regelmaat, de patronen, die je in het praktische rekenen hebt ontdekt of geleerd.

Zo omschreven lijkt het een onwaarschijnlijke en misschien wel een gevaarlijke bezigheid. Maar het is ook een heel menselijke bezigheid; is het niet zo dat ons brein eigenlijk niets liever doet dan de eigen logica's te volgen en de werelden te verkennen waarin men dan terecht komt? De aantrekkingskracht van rekenen staat niet zo ver van de meer gebruikelijke verleidingen van het intellect. En als je dan, zoals Archimedes onderstreepte, in een wereld terecht komt die uitnodigt tot expliciet begrijpen, en die daar ook de mogelijkheden voor biedt, dan is de aantrekkingskracht en de uitdaging, van rekenen, en van wiskunde in het algemeen, niet meer verbazend.

Ik heb eerder de virtuositeit van Ludolph's pi-berekening genoemd. Aansluitend aan die virtuositeit en aan het medium waarmee het resultaat bekend gemaakt werd — namelijk een grafsteen — dringt zich het beeld op van de toegift aan het slot van een concert, waarin de solist nog één keer alle tempi, trillers en boventonen laat horen die hij aan kan. Indrukwekkend, opwindend wellicht, maar de toegift moet niet de herinnering wegnemen aan de rest van het concert. Dat is Ludolph wel overkomen, en dat is jammer, want het concert — zijn wiskundig werk — mocht er ook zijn.

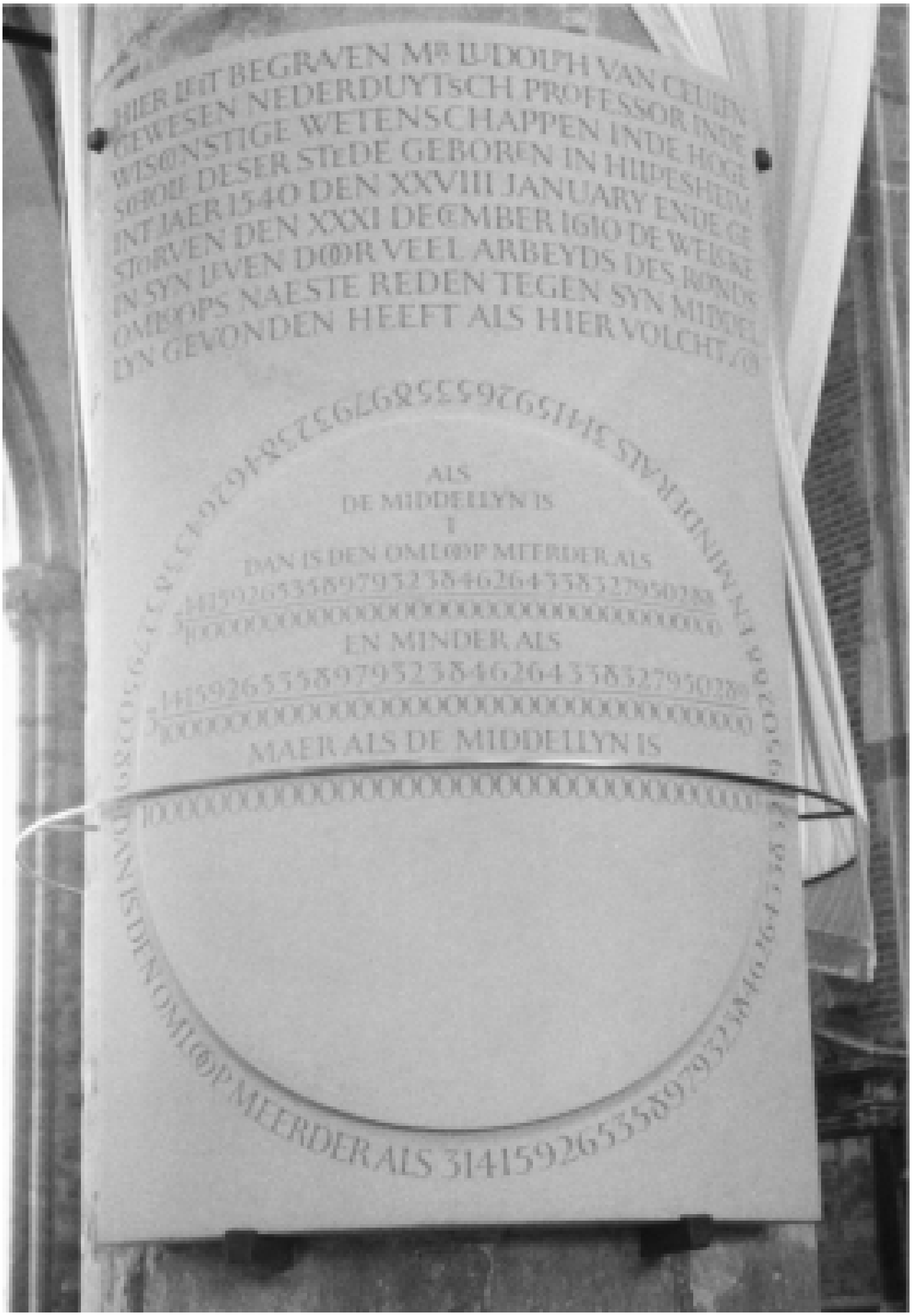
De cijfers op zijn grafsteen mogen zeker een herinnering oproepen, maar niet alleen aan virtuoos cijferen. Ze vormen ook het embleem van de cirkeldeling en de toenmalige vorm van grootschalig rekenen met al zijn praktische toepassingen.

Maar ik zie in Ludolph's cijfers ook graag een verwijzing naar de wiskunde in het algemeen, het terrein van de verrassende en tegelijk overtuigende patronen en structuren, voorbij de simpele tastbaarheid, de precisie en het directe nut; een terrein waarvoor het menselijk brein een sleutel blijkt te hebben. Dat terrein houdt een uitdaging in, de uitdaging van de wiskunde, en het is een menselijke, en zeker ook een humane bezigheid, om die uitdaging te aanvaarden en het terrein te verkennen.

Ze mogen dus gezien worden, Ludolph's cijfers, en zodadelijk kunnen we ze ook zien, kunstig gehakt in een nieuwe steen. Ze zullen veel bezoekers van deze kerk aan wiskunde herinneren, en als het aan Ludolph zou liggen, denk ik, is dat een wiskunde die met avontuur verkend en met lust bedreven wordt.

Literatuur

1. Jaap Top, *Ludolph van Ceulen: schermmeester en wisconstenaar*, Natuur & Techniek 68e jaargang, juni 2000, 40–41.
2. Friedrich Katscher, *Einige Entdeckungen über die Geschichte der Zahl Pi sowie Leben und Werk von Christoffer Dybvad und Ludolph van Ceulen*, Wenen: Österreichische Akademie der Wissenschaften, Denkschriften 116, 1979.


HIER LEIT BEGRAVEN Mr LUDOLPH VAN CEULEN
GEWESEN NEDERDUYTSCH PROFESSOR INDE
WISCONSTIGE WETENSCHAPPEN INDE HOGE
SCHOLE DESER STEDE GEBOREN IN HILDESHEM
INT JAER 1540 DEN XXVIII JANUARY ENDE GESTORVEN DEN XXXI DECEMBER 1610 DE WELCKE
IN SYN LEVEN DOOR VEEL ARBEYDS DES RONDS
OMLOOPS NAESTE REDEN TEGEN SYN MIDDEL
LYN GEVONDEN HEEFT ALS HIER VOLCHT
ALS
DE MIDDELLYN IS
1
DAN IS DEN OMLOOP MEERDER ALS
EN MINDER ALS
MAER ALS DE MIDDELLYN IS
MEERDER ALS 314159265358979