

Het verdwijnpunt bij M.C. Escher
of:
Het gat in de Prentententoonstelling
door Floske Spieksma

Voordracht gehouden op 17 juli 2008 voor de Probusclub Kennemerland

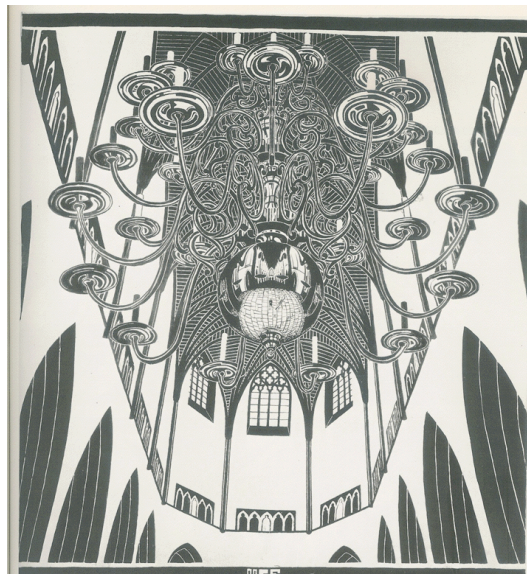
Biografie

Maurits (Mauk) Cornelis Escher werd geboren op 17 juni 1898 als jongste zoon van George Arnold Escher (1843) en Sara Gleichmann (1860) in de 'Princessenhof' te Leeuwarden. Zijn vader was een bereisd waterbouwkundig ingenieur in goeden doen. Zijn moeder was de dochter van een voormalig Tweede Kamer-voorzitter en minister van financiën. Broer Berend is later hoogleraar geologie en kristallografie te Leiden geworden. Via hem raakte Escher in de dertiger jaren bekend met de kristallografische literatuur.

Zijn schooljaren bracht Escher in Arnhem door. Ondanks het feit dat hij linkshandig was, moest hij, zoals gebruikelijk in die tijd, rechtshandig leren schrijven. Later kwam die verworven twee-handigheid goed uit (denk aan zijn fascinatie met spiegelingen). In 1918 haalde hij bij zijn eind-examen HBS slechts vier voldoende, voor wiskunde, biologie, nederlands en tekenen. Hij wilde het liefst iets met tekenen doen, maar zijn vader had vroeger graag bouwkunde willen studeren en dus ging Escher naar Delft. Dankzij zijn vaders invloed hoefde hij pas na zijn eerste jaar zijn eindexamen gehaald te hebben.

Het werd al snel duidelijk dat Delft niets zou worden, en zo ging Escher een jaar later naar de School voor Bouwkunde en Sierende Kunsten in Haarlem. Na één week bouwkunde switchte hij op advies van leraar grafische kunsten S. Jesserun de Mesquita naar diens vak. Papa was niet enthousiast, met name wegens het gebrek aan toekomstperspectief, maar hij vond het verder goed. Tot zijn dood in 1939 heeft hij zijn zoon wel financieel gesteund. Daarna was Escher jr. financieel onafhankelijk.

De latere Escher is in die tijd al zichtbaar door tekeningen als die van de Sint Bavo in Haarlem, waar de tekenaar in de spiegeling van de bol van de kroonluchter te zien is.



St. Bavo Haarlem, 1920

Na het voltooien van zijn opleiding in 1922 reisde Escher graag rond in Italië in het muziek- en wijnminnend gezelschap van kunstvrienden, ter inspiratie en studie. Hij was reuze gefascineerd door de structuren van stedenbouw en landschap..Ruïnes interesseerden hem geen zier door hun verlies van structuur. Zijn bekendste prent uit

die tijd is de litho van Castrovalva (1930). Zijn werk werd in het algemeen gunstig beoordeeld door de kunstcritici.

In Italië ontmoette hij ook zijn latere vrouw Jetta Umiker. Zij was een dochter van een Zwitserse voormalig directeur van een aantal zijdefabrieken vlakbij Moskou. Zodoende was ze meer Russisch dan Zwitsers. Na de Russische revolutie moest de familie vluchten, een barre tocht. Dat heeft nogal ingegrepen in haar gemoedstoestand, die over het algemeen vrij depressief was. Het paar bleef in Italië wonen en kreeg drie zonen.

Door de toenemende druk van het fascisme vertrokken de Eschers in 1935 naar Zwitserland, een “afschuwelijke witte-sneeuw ellende”. In 1936 kwam Escher op het briljante idee om aan de Compagnia de Navigazione “Adria” aan te bieden een reclameboekje te maken in ruil voor gratis reizen. Dit werd een omslagpunt in zijn werk door de studie van regelmatige vlakvullingen in het Alhambra (tijdens de Spaanse Burgeroorlog gedaan, hetgeen hem nog een beschuldiging van spionage en aanpalend gevangenisverblijf opleverde).

In 1937 gingen de Eschers in Ukkel in België wonen, en in 1941 in Baarn. In de oorlog distantieerde Escher zich van de Kultuurkamer. Na de oorlog kwam de verkoop van zijn prenten goed op gang. Internationale erkenning volgde door twee gebeurtenissen. Via een tentoonstelling in Antwerpen in 1950 van Nederlandse grafici raakte correspondent Israel Shenker van Time in Escher geïnteresseerd. Daarna heeft hoogleraar Niek de Bruijn tijdens het Internationaal Mathematisch Congres in Amsterdam in 1954 een Escher-tentoonstelling in het Stedelijk Museum georganiseerd, waardoor de wiskundige wereld Escher gewaar werd (met name Penrose en Coxeter). Eschers populariteit drong zelfs door tot toenmalige popkringen, waardoor er o.a. een verzoek van de Rolling Stones kwam om een prent op de omslaghoes van één van hun LP's te mogen zetten. Dit wees Escher af, en hij berispte daarbij Mick Jagger dat die zich had verstout hem (Escher) te tutoyeren. Escher stierf in het Rosa Spierhuis op 27 maart 1972.

Prentententoonstelling (1956)



Het doel van mijn voordracht was om de prent “De Prentententoonstelling” wiskundig te analyseren. Deze prent heeft Escher de nodige hoofdbrekens gekost. Dit schrijft hij naar aanleiding van kritische opmerkingen over de esthetiek van deze prent en hij merkt daarbij op dat hij “uitsluitend verwondering bij de toeschouwers tracht op te wekken” en dat het “met de schoonheid soms kwalijk gesteld is”. De prent verbeeldt (naar Eschers zeggen) een ringvormige uitdijning die nergens begint en nergens eindigt. De kijker is tevens de bekeken. Dit slaat op de jongeman op de prent die kijkt naar een oude prent van Escher van de haven van Valetta op Malta. Zijn blik glijdt daarbij naar een mevrouw op die prent, die uit een raam hangt boven het dak van het tentoonstellingsgebouw waarin de jongeman zich bevindt. De jongeman kijkt

derhalve naar zichzelf, maar op de prent is dat niet zichtbaar door de witte vlek. De prentententoonstelling bevindt zich in de prentententoonstelling.

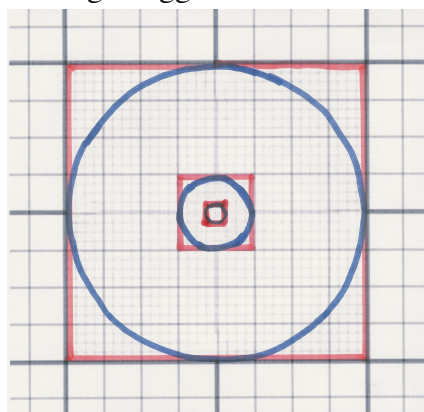
Dit suggereert een verborgen Droste-effect waarbij een plaatje op steeds kleinere schaal binnen zichzelf wordt afgebeeld, net als op het Droste cacaoblik. Het verschil is dat we de herhaling niet zien door de witte vlek in het midden. Bovendien, *als* er een Droste-effect in zit, is dit niet een lineair maar een spiraliserend Droste-effect.

Dit was aanleiding voor Hendrik Lenstra, de hoogleraar algebraïsche getaltheorie in Leiden, om te onderzoeken of de Prentententoonstelling inderdaad een spiraliserend Drosteplaatje kon zijn, en, zo ja, of het “gat” (de witte vlek) gevuld kon worden. De wiskundige constructie van zo’n soort plaatje werd door hem in 2000 in een paar uurtjes bedacht. Het kostte echter twee jaar aan programmeren, intekenen en inkleuren en een boel medewerkers om dit aan te tonen en het gat daadwerkelijk te vullen.

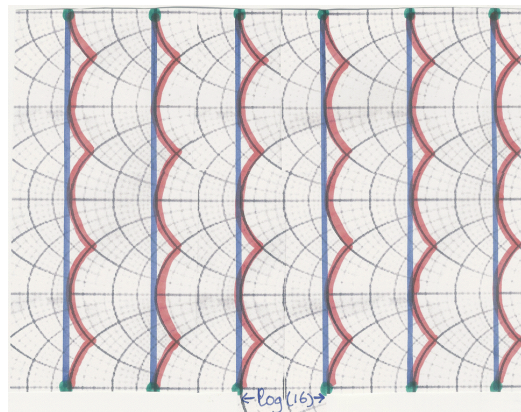
Het idee voor de wiskundige constructie is gebaseerd op de vraag hoe je een spiraliserend Drosteplaatje zou kunnen maken. Men neme het Drosteblik. Het plaatje van de verpleegster met het blik in haar handen wordt steeds ongeveer zes keer kleiner afgebeeld. Op logaritmische schaal worden die plaatjes allemaal even groot.

Dit is gemakkelijker te visualiseren aan de hand van een simpeler Drosteplaatje van een rood vierkant met daarin een blauwe cirkel, dat steeds met een factor 16 verkleind wordt. Dit Drosteplaatje teken je over op de “onderkant” van een super-elastische ballon, zó dat het midden van het plaatje op het midden van de onderkant staat. Pak de ballon vast in het midden van het plaatje en trek de ballon in lengterichting maximaal (=oneindig ver) uit. Je krijgt dan een oneindig lange buis. Deze kun je van de zijkant bekijken en dan blijken de blauwe cirkels onderling parallel om de buis heen te lopen.

Knip die buis open, dan krijg je een oneindig lange strip, van rechte blauwe parallele lijnen en wat krommige rode lijnen (oorspronkelijk de vierkanten), ieder met 4 rechte(!) hoeken. Nu maken we er behangpapier van, door oneindig veel van die strips aan elkaar vast te plakken, op zo’n manier dat de blauwe lijnen in elkaars verlengde liggen

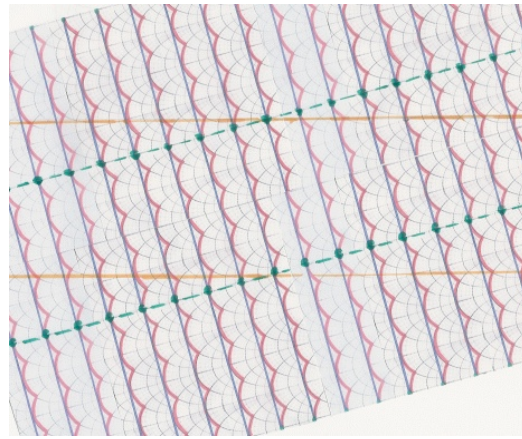


Droste plaatje



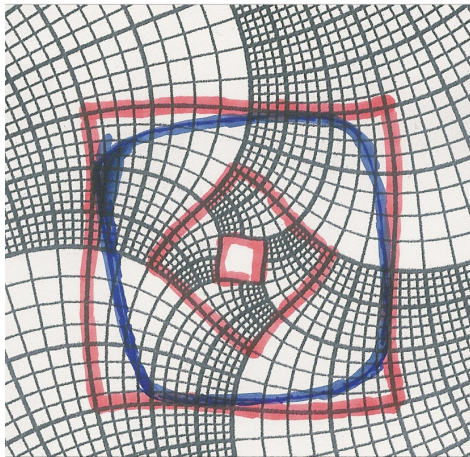
Opegeknijpte buis

We zijn op het punt beland dat we dit eindeloze behangpapier kunnen gaan manipuleren. Die manipulaties moeten wel zo zijn dat er geen breuklijnen ontstaan. Dat betekent ook dat rechte hoeken (die van de rode vierkanten) recht moeten blijven (Wiskundig heet dat een conforme afbeelding). De enige manier om dat te doen, is door het behangpapier weer op te rollen, zo dat blauwe en rode lijnen over elkaar heen vallen (als het behangpapier doorzichtig zou zijn).

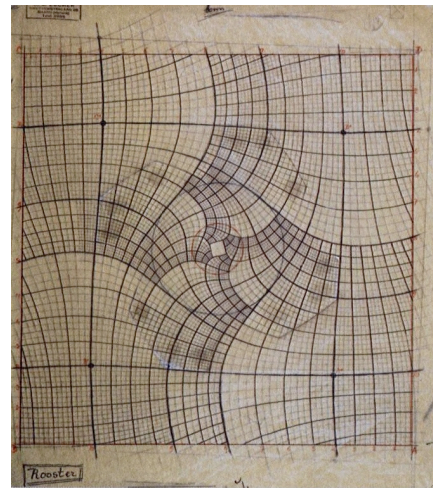


Beetje scheef oprollen – scheeftegraad heeft zogenaamde parameter (1,1)

Vervolgens krijg je een oneindige lange buis, die we interpreteren als een oneindig lange buisballon. We laten nu de punt van de ballon los tot de oorspronkelijke ballonvorm weer is ontstaan. Als je het behangpapier recht op zou rollen, krijg je het oude Drosteplaatje weer terug. Maar als je het ietsje scheef oprolt, dan zijn de eerst parallelle blauwe cirkels een lange spiraal geworden. Loslaten van de ballonpunt geeft dan een spiralisierend Drosteplaatje.



Wiskundige constructie: simpelste spiralisatie



Eschers rooster

Rol je het behang nog schever op, dan krijg je twee lange blauwe spiralen langs de buis, en een Drosteplaatje met een dubbele spiraal. Oneindig veel oprolmogelijkheden dus, waarvan er een aantal op de webpagina <http://escherdroste.math.leidenuniv.nl> te zien zijn.

Wat heeft dit met de Prentententoonstelling te maken? Eschers voorstudies maken duidelijk dat zijn verkleiningsfactor 256 (16x16) is. Teken nu de roosterlijnen in op ons Drosteplaatje met verkleiningsfactor 16, en maak de simpelste spiralisierende Droste-variant. Vergelijking met Eschers verdraaide (!) rooster laat zien dat deze twee vrijwel over elkaar heenvallen. Er is een klein verschil: de hoek waarover Escher het buitenste vierkant draait om het binnenste te krijgen is 160 graden, en de verkleiningsfactor is ongeveer 18. Het geconstrueerde rooster heeft een draaiingshoek van circa 157 graden (buitenste rode vierkantje t.o.v. binnenste) en een verkleiningsfactor van ongeveer 20. De wiskundige formule die van het rechte rooster het spiralisierende rooster maakt, is:

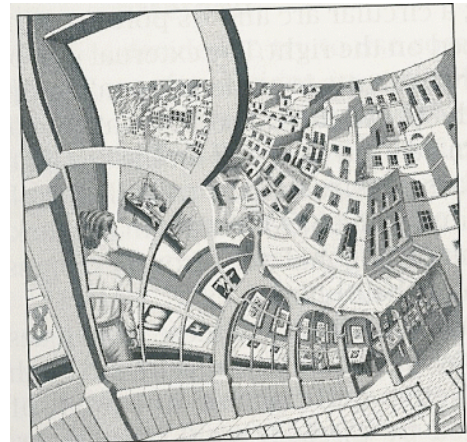
$$z \rightarrow e^{\alpha \log z}, \quad \text{met } \alpha = \frac{2\pi i}{2\pi i + \log 256}$$

We mogen hieruit concluderen dat het gat weliswaar niet precies door Escher had kunnen worden opgevuld, maar wel bijna.

In Leiden is vervolgens eerst met gebruikmaking van Eschers rooster de prent weer recht gemaakt. Door het recht maken (ont-spiraliseren) wordt de witte vlek in de oorspronkelijke prent juist een witte spiraal in het rechte plaatje. Deze witte spiraal



Deel van rechte plaatje



Ingevulde plaatje

moest worden ingetekend en ingekleurd. Daarna is met behulp van het wiskundige procédé weer een spiraliserend Drosteplaatje gemaakt. Vergelijken we de twee plaatjes, dan zie je dat in het geconstrueerde plaatje de gekromde lijnen wat boller lopen dan bij Escher. Maar ook moest er in de prententoonstelling in de linker onderhoek nog een prent toegevoegd worden. Als grapje is gekozen voor Eschers prent van de Möbiusband waarover mieren kruipen.

De Prententoonstelling is een illustratie van het monnikenwerk dat Escher steeds als voorstudie deed van zijn ingenieus geconstrueerde prenten. Grappig detail is, dat naar aanleiding van de wiskundige analyse het woord Droste-effect een internationaal woord is geworden en er een ware hype is ontstaan om zelf foto's, plaatjes e.d. te ver-Escheren. Op internet zijn daar programma's voor te vinden!