## Het aantal atomen in een Magnetisch-Optische Val

Ten behoeve van nanotechnologie is het van belang om kleine hoeveelheden atomen te kunnen controleren. Een methode om dit voor elkaar te kunnen krijgen is een zogenaamde Magnetisch-Optische Val (afkorting: MOT= Magneto-Optical Trap). Hierin kunnen atomen afgekoeld worden tot een fractie boven het absolute nulpunt, zodat hun snelheid heel klein is.

Door Rukhin en Bebu (2006) is een stochastisch model voor het aantal atomen in zo'n MOT opgesteld en bestudeerd. Dit stochastische model kan worden geformuleerd als een Markovketen $\{X_n\}_n$ in discrete tijd, op de aftelbare toestandsruimte $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Hierbij staat $X_n$ voor het aantal atomen in de MOT op tijdstip $n$. De overgangskansen van deze keten worden gegeven door:

$$\mathsf{P}\{X_{n+1} = y \mid X_n = x\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} \sum_{k \geq x} e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^k}{k!} + e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^{x-y}}{(x-y)!} \mathbf{1}_{\{1 \leq y \leq x\}},$$

waarbij $\lambda$ de afvuur parameter is, en $\mu$ de verval parameter van atomen. Je kunt laten zien dat deze keten zich netjes gedraagt, d.w.z. hij heeft een stationaire verdeling en deze wordt exponentieel snel 'bereikt'. Het bewijs hiervan maakt gebruik van een zogenaamde Lyapunov functie.

Er zijn verschillende interessante vragen met betrekking tot dit model. De eerste betreft het maxi-

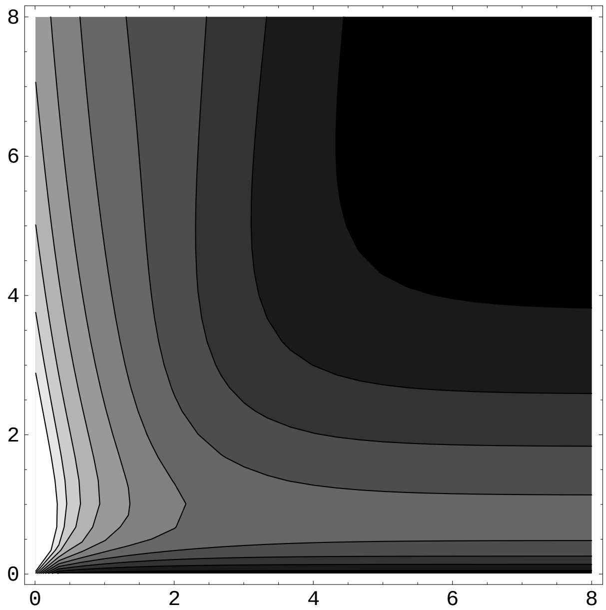


Figure 1: A contour plot of $\pi_1$ for $\mu \in [0, 01..8]$, $\pi_1$ for $\lambda \in [0, 01..8]$

maliseren van de stationaire kans $\pi_1$ op 1 atoom in de val. Dit is van belang als je het gedrag van slechts 1 atoom wilt bestuderen. Hierboven zie je een contourplotje van $\pi_1$. Opmerkelijk is dat deze kans niet monotoon is in de vervalparameter.

Hoe snel moet je de atomen op de val afvuren opdat deze kans maximaal is? Is er wel een beste afvuursnelheid? Deze vraag is de vraag naar het bestaan van een optimal strategie voor een zogenaamde Markov beslissingsketen, waarbij de mogelijke beslissingen corresponderen met mogelijke afvuurparameters. Als er een optimale parameter bestaat, hoe bereken je deze dan?

De tweede vraag betreft het berekenen van de exponentiële convergentiesnelheid van de verdeling van het aantal atomen in de val op tijdstip $t$ naar de stationaire verdeling van het proces. Dat is i.h.a. een lastig probleem. Eén van deze methodes maakt gebruik van zogenaamde koppelingsargumenten, dit is een stochastische methode. Het lijkt echter dat je analytische argumenten zult moet toepassen op kansgenererende functies van $x$ atomen in de val op tijdstip $t$.

Numerieke resultaten m.b.t. deze twee vragen zijn al afgeleid in een eerdere Bachelorscriptie door Jasper Koning. Daarin is ook een fout in het oorspronkelijke artikel van Rukhin en Bebu aan het licht gekomen. Hier zijn twee vervolgprojecten mogelijk.

**Project 1**

1. Bestuderen van de theorie van (eenvoudige) Markov beslissingsketens op een aftelbare toestandsruimte.
2. Onderzoeken of er een optimale afvuurparameter bestaat, en hoe deze afhangt van de snelheid van verval van de atomen in de val.
3. Deze optimale parameter (mits deze bestaat) berekenen.

**Project 2**

1. Bestuderen van de theorie van (eenvoudige) Markovketen in continue tijd, op een aftelbare toestandsruimte.
2. Bestuderen van de theorie over exponentiële convergentie van deze Markovketens en enkele methodes om de exponentiële convergentiesnelheid te berekenen. Bestuderen van koppelingsmethoden, waaronder ook de zogenaamde maximale koppeling.
3. Onderzoeken of één van deze methodes toepasbaar is op het onderhavige MOT-model en zo ja, het berekenen van deze snelheid.

Floske Spieksma
`spieksma@math.leidenuniv.nl`
Bachelorproject voor het AS&B seminarium
voorjaar 2010