Wie het meeste waagt die wint oftewel: is stout spel in een casino optimaal?

Rood-zwart gokken De maffia zit achter je aan: morgen € 500 handje contantje of anders ... Helaas heb je nog maar € 200.

Wellicht kan de roulettetafel in het het casino uitkomst bieden. Je besluit om altijd maar op één kleur in te zetten: dit wordt rood-zwart gokken genoemd. Vervolgens speel je net zolang dóór tot je blut bent of de gevraagde € 500 hebt. De vraag is dan: hoeveel moet je steeds inzetten om je verwachte winstkans te maximaliseren?

Met behulp van Markov Beslissingstheorie is het niet moeilijk om te bewijzen dat 'bold play' optimaal is. Dat wil zeggen dat je $\min\{x, 500 - x\}$ inzet wanneer je huidige kapitaal x is. Je zet dus maximaal in, maar nooit meer dan je nodig hebt om je doelkapitaal te bereiken.

De eerste vraag is natuurlijk: hoe groot is de (maximale) winstkans bij bold play? Met technieken uit de Markov Beslissingsketens kun je die berekenen.

Ander gokmethodes Een veel belangrijker vraag is: is bold play **altijd** optimaal?

Als eerste variant, veronderstellen we dat het casino een maximum heeft gesteld aan de hoogte van de inzet van de spelers, zeg M.

In 1972 heeft Ernest Wilkins [1] aangetoond dat gemodificeerd 'bold play' optimaal is, wanneer het doelbedrag een veelvoud is van de maximaal toegestane inzet M. In ons geval betekent dit dat je altijd $\min\{x, 500 - x, M\}$ moet inzetten. Als het doelbedrag geen veelvoud is van de limiet, blijkt 'bold play' niet noodzakelijk optimaal te zijn, zie [2,3].

Kun je je winstkans verbeteren als je meerdere typen spel toestaat, i.p.v. altijd alleen op één kleur in te zetten? Je kunt dat zien als een casino met 'meerdere tafels'.

In een artikel [4] uit 2006 bestudeert Larry Shepp een zogenaamd 'Vardi casino' met een continuum aan tafels. Voor het gemak normeren we ons doelkapitaal op 1. In een Vardi casino is elke inzet toegestaan. Op alle tafels is de gemiddelde uitbetaling c keer de inzet, met $c \in (-1, 0)$ gegeven, maar de uitbetaling bij winst op tafel T_r is r keer de inzet $r \in (0, \infty)$ (dit impliceert dat de winstkans afneemt met toenemende r!).

Shepp toont aan dat de maximale verwachte winstkans gelijk is aan $1 - (1 - f)^{1+c}$ met f het beginkapitaal. Er is echter geen optimale inzet-strategie, waarvoor de winstkans gelijk is aan dit getal. Deze kans kan wel willekeurig dicht benaderd worden door strategieën S_α te spelen met $\alpha > 0$ willekeurig dicht bij 0. Onder strategie S_α speel je 'bold' wanneer je huidige kapitaal $x \leq \alpha$. Als $x > \alpha$, dan zet je $\alpha(1-x)/(1-\alpha)$ in. Je zet altijd in op de tafel die bij winst je beoogde eindkapitaal oplevert.

Project Het project kan de volgende onderdelen omvatten:

1. Het bestuderen van het simpele rood-zwart gokmodel zonder maximaal toegestane inzet. Hiervoor moet je ook de basistheorie van Markov Beslissingsketens bestuderen [5].

2. Vervolgens kun je verschillende kanten op:

   i) *Rood-zwart gokken met maximaal toegestane inzet.* Hiervoor moet je artikelen [1,2,3] bestuderen. In [1] wordt geen gebruik gemaakt van Markov Beslissingsketens. Modelleer dit probleem als een Markov Beslissingsketen en toon aan dat bold play optimaal is als het beoogde eindkapitaal een veelvoud is van de maximaal toegestane inzet. Verklaar de rol van de eis dat het beoogde eindkapitaal een veelvoud moet zijn van de toegestane inzet.

ii) *Vardi-casino.* Bestudeer [4]. Dit maakt gebruik van martingaal theorie, waarvan je je de beginselen eerst eigen moet maken. Kan dit probleem als een Markov Beslissingsketen met een discrete toestandsruimte gemodelleerd worden? Waarom is er geen optimale strategie?

iii) *Maximale inzet in Vardi's casino.* Dit is een combinatie van (i) en (ii). De vraag is wat het eisen van een bovengrens op de inzet voor effect heeft op de maximaal verwachte winstkans in het Vardi casino.

Referenties

[1] J.E. Wilkins Jr. (1972). Bold strategy in presence of a house limit. *Proc. Amer. Math. Soc.* **32**, 567–570.

[2] D.C. Heath, W.E. Pruitt, W.E. and W.D. Sudderth (1972). Subfair red- and-black with a limit. *Proc. Amer. Math. Soc.* **35**, 555-560.

[3] J. Schweinsberg (2005). Improving on bold play when the gambler is restricted. *J. Appl. Prob.* **42**, 321-333.

[4] L. Shepp (2006) Bold play and the optimal policy for Vardi's casino. *Random Walk, Sequantial Analysis and related Topics. A Festschrift in Honor of Yuan-Shih Chow*, 150–156.

[5] L.Kallenberg (2012) Markov Decision Processes. Lecture Notes.

Floske Spieksma
`spieksma@math.leidenuniv.nl`
Bachelorproject voor het AS&B seminarium
voorjaar 2012