

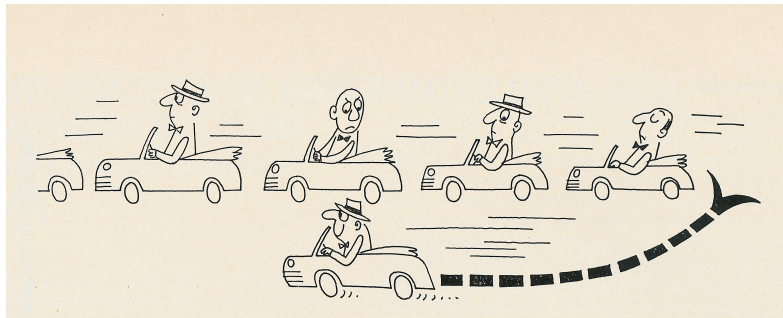
BESLISKUNDE A

Najaar 2017

Deel 2

L.C.M. KALLENBERG en F.M. SPIEKSMA

UNIVERSITEIT LEIDEN



Inhoudsopgave

5	WACHTTIJDTHEORIE	1
5.1	Inleiding	1
5.2	Wachttijdparadox	4
5.3	De formules van Little en PASTA	4
5.4	Geboorte-sterfte processen (vervolg)	8
5.5	Modellen gebaseerd op het geboorte-sterfte proces	9
5.6	Het M/G/1 model	17
5.7	Netwerken van wachtrijen	21
5.7.1	De tandem wachtrij	21
5.7.2	Open netwerk van wachtrijen (Jackson netwerken)	24
5.7.3	Gesloten netwerk van wachtrijen	26
5.8	Opgaven	30
6	SIMULATIE	37
6.1	Inleiding	37
6.2	Statistische verwerking van gegevens	38
6.3	Voorbeelden van simulaties	42
6.4	Aselecte getallen en aselechte trekkingen	47
6.5	Variantie reducerende technieken	54
6.5.1	Stratificatie	54
6.5.2	Complementaire aselechte getallen	56
6.6	Opgaven	57
7	DYNAMISCHE PROGRAMMERING	61
7.1	Inleiding	61
7.2	Terminologie	63
7.3	Deterministische dynamische programmering	64
7.4	Stochastische dynamische programmering	68
7.5	Opgaven	70
8	MARKOV BESLISSINGSTHEORIE	75
8.1	Inleiding	75

8.1.1	Het model	75
8.1.2	Strategieën	76
8.2	Eindige horizon en totale opbrengsten	80
8.2.1	Onbegrensde opbrengsten	82
8.3	Oneindige horizon en totale opbrengsten	83
8.3.1	Voorbeelden	83
8.3.2	Aannames en definities	84
8.3.3	Optimaliteitsvergelijking via contractie-afbeeldingen	85
8.3.4	Strategie verbetering	90
8.3.5	Waarde-iteratie	93
8.3.6	Lineaire Programmering	94
8.4	Kansmaximalisatie: Rood-Zwart Casino	97
8.5	Optimaal stoppen	99
8.6	Verdisconteerde opbrengsten	105
8.7	Opgaven	108
A	OPLOSSING VAN DE VRAGEN	115
A.1	Hoofdstuk 5	116
A.2	Hoofdstuk 6	119
A.3	Hoofdstuk 7	127
A.4	Hoofdstuk 8	129
B	Index	133

Hoofdstuk 5

WACHTTIJDTHEORIE

5.1 Inleiding

In de wachttijdtheorie wordt een model bestudeerd waarin klanten een systeem binnenkomen volgens een bepaald *aankomstproces*, daar een zekere bediening krijgen (*bedieningsproces*) en vervolgens het systeem verlaten. Als de bedienden bezet zijn, dan moeten de klanten in een *wachtrij* plaatsnemen. Deze wachtrij kan een beperkt of een onbeperkt aantal plaatsen hebben. Als er een nieuwe klant arriveert terwijl de wachtrij vol is, dan zal deze klant zonder bediening ontvangen te hebben het systeem verlaten. We zullen de onderdelen *aankomstproces*, *bedieningsproces* en *wachtrij* nader bespreken.

In de wachttijdtheorie wordt een groot aantal wachttijdmodellen geanalyseerd. Exacte oplossingen zijn vrijwel alleen voor eenvoudige modellen te vinden. Wel kunnen de gevonden formules vaak zinvol zijn als benadering voor complexere modellen. Vaak worden ook computersimulaties gebruikt om wachttijdproblemen te analyseren. De waarde van simulatie moet niet overschat worden. Een wiskundige analyse van een model geeft inzicht, waar simulatie vooral getallen produceert. Het is niet altijd eenvoudig om uit deze getallen bruikbare conclusies te trekken. Waar mogelijk lijkt een samenspel van wiskundige analyse en simulatie de aangewezen weg.

Wachttijdproblemen treden in de praktijk op in vele uiteenlopende situaties: in de telecommunicatie, waarin gesprekken en berichten wachten op beschikbare communicatielijnen; in zeehavens waar schepen wachten op beschikbare laad- en losfaciliteiten; in een productiehal waar goederen wachten op beschikbare machines, etc. De wachttijdtheorie startte in 1905 met het werk van A.K. Erlang, die een telefoonsysteem moest ontwikkelen en daarbij de vraag beantwoorden hoeveel parallelgesprekken tegelijkertijd gevoerd moesten kunnen worden om onder een bepaalde getal, de *blokkeringskans* (het percentage van de aanvragen die geen gesprek konden krijgen), te blijven.

Bij het ontwerp van allerlei systemen moet antwoord gegeven worden op vragen van het type: "Hoeveel telefoonlijnen zijn nodig om een zeker service-niveau te bereiken"? Anderzijds wil men de kosten van deze systemen minimaal houden. Dit geeft een wisselwerking en spanning tussen

het wachten van klanten en de bezettingsgraad van de telefoonlijnen. Hoe hoger het service-niveau, hoe groter de kosten. Meestal wordt een bepaald service-niveau als uitgangspunt gekozen. Gegeven dit service-niveau wordt gevraagd naar minimale kosten. Uit de theorie is af te leiden dat als dit soort systemen zwaarder wordt belast de wachttijden veel sterker dan lineair, vaak zelfs exponentieel, toenemen.

Aankomstproces

We zullen in dit hoofdstuk, tenzij anders vermeld, aannemen dat de klanten aankomen volgens een *Poisson proces* met parameter λ . Een Poissonproces is een vernieuwingsproces waarvan de tussentijden exponentieel verdeeld zijn. Dit aankomstproces veronderstelt een oneindige populatie en is bruikbaar om vele praktische situaties te modelleren. Het Poisson proces kan met name goed worden gebruikt als de kans dat in een komend klein tijdsinterval een klant arriveert niet afhangt van hoe lang het geleden is dat voor het laatst een klant aankwam; dit is bijvoorbeeld het geval als de aankomsttijdstippen onvoorspelbaar is. Het zal blijken dat in het geval van een Poisson aankomstproces eenvoudige wachttijdformules kunnen worden afgeleid.

Het Poissonproces is een telproces $\{N(t), t \geq 0\}$, met $N(t)$ het aantal aankomsten in het interval $[0, t]$, dat voldoet aan de volgende drie eisen:

1. $N(0) = 0$.
2. $\{N(t), t \geq 0\}$ heeft onafhankelijke aanwas, d.w.z. dat voor alle keuzes van $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ de n stochastische variabelen $N(t_1) - N(t_0), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ onafhankelijk zijn.
3. Het aantal aankomsten in ieder interval ter lengte t heeft een Poisson verdeling met parameter λt , d.w.z. $\mathbb{P}\{N(t+s) - N(s) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t}$ voor alle $s, t \geq 0, n \in \mathbb{N}_0$.

De kans in voorwaarde 3 is onafhankelijk van het verleden s ; vandaar dat ook wel wordt gesproken over aankomsten met de *Markov eigenschap*. Uit de eigenschappen van de Poisson verdeling volgt dat $\mathbb{E}\{N(t)\} = \text{var}\{N(t)\} = \lambda t$.

Er kan worden bewezen¹ dat het Poisson proces ook equivalent gekarakteriseerd wordt door in plaats van eigenschap 3 de volgende twee eigenschappen te eisen:

- 3a. $\mathbb{P}\{N(t) = 1\} = \lambda t + o(t)$, waarbij $o(t)$ betekent dat $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$.
- 3b. $\mathbb{P}\{N(t) = 0\} = 1 - \lambda t + o(t)$.

Eigenschap 3a is de reden dat λ ook wel de *aankomstsnelheid* wordt genoemd.

Zij $\{X_n\}$ de tijd tussen de $(n-1)$ -ste en n -de aankomst. De rij $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ is de rij van *tussentijden*. Op grond van eigenschap 2 zijn de X_n 's onderling onafhankelijk. Merk op dat volgens eigenschap 3 geldt:

$$\mathbb{P}\{X_n > t\} = \mathbb{P}\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t} \text{ voor alle } n = 1, 2, \dots,$$

d.w.z. dat iedere X_n een exponentiële verdeling heeft met parameter λ . Deze verdeling heeft als verwachting $\frac{1}{\lambda}$, waaruit volgt:

¹S.M. Ross, "Applied Probability Models with Optimization Applications", Holden-Day, 1970 (chapter 2).

$$\mathbb{E}\{\text{tijdsduur tussen twee opeenvolgende aankomsten}\} = \frac{1}{\lambda}.$$

Bedieningsproces

Bij het bedieningsproces hebben we te maken met de volgende drie aspecten:

1. De bedieningsdiscipline

De bedieningsdiscipline is een voorschrift voor de volgorde waarin de klanten die in de wachtrij staan worden geselecteerd voor een vrijgekomen bediening. We zullen in dit hoofdstuk aannemen dat de bedieningsvolgorde dezelfde is als de volgorde van aankomst. Deze regel heet *FIFO* (first in - first out).

2. De bedieningsduur

Voor iedere bediende moet de kansverdeling van de bedieningsduur van een klant gegeven zijn. Een veel voorkomende keuze voor de verdeling van de bedieningsduur is de exponentiële verdeling met parameter μ .

In dat geval heeft de bedieningsduur B de volgende eigenschappen:

- (1) Markov eigenschap: $\mathbb{P}\{B > t + s \mid B > s\} = \mathbb{P}\{B > t\}$ voor alle $s, t \geq 0$.
- (2) $\mathbb{P}\{B > t\} = e^{-\mu t}$.
- (3) $\mathbb{E}\{B\} = \mu^{-1}$ en $\text{var}\{T\} = \mu^{-2}$.

3. Het aantal bedienden

Dit aantal wordt met s genoteerd.

Eindige klantenbron

Een belangrijke groep wachttijdmodellen zijn die waarbij het aantal klanten eindig is. We spreken dan van een model met een *eindige klantenbron*. Een voorbeeld van een model met een eindige klantenbron is het onderhoud van een zeker aantal, zeg N , machines. Als er n machines in reparatie (bediening) zijn, dan zijn er $N - n$ die zich eventueel kunnen melden voor reparatie. Nemen we aan dat de tijdsduur voordat een machine stuk gaat exponentiëel verdeeld is met parameter λ , dan melden potentiële klanten zich volgens een Poisson proces met parameter λ .

De wachtrij

De wachtrij is de ruimte waar de klanten op bediening wachten. Deze ruimte kan een eindig, zeg N , of een oneindig aantal plaatsen bevatten. De aanname van een oneindig aantal plaatsen is vaak gebruikelijk in wachttijdmodellen, zelfs als er in feite eindig, maar zeer veel, plaatsen zijn. Dan kan deze oneindigheidsaanname worden gedaan als de kans dat de wachtrij vol raakt zeer klein is. Als het aantal plaatsen klein is of de kans dat alle plaatsen bezet raken niet verwaarloosbaar is, dan moet de wachtrij inderdaad eindig worden genomen.

5.2 Wachttijdparadox

In het hoofdstuk ‘Vernieuwingstheorie’ hebben we reeds een eerste belangrijke eigenschap gezien, namelijk de Wachttijdparadox: gemiddeld duurt wachten langer dan je verwacht.

We zullen dit iets preciezer maken in de context van wachtrijprocessen. Stel dat het aankomstproces van klanten en vernieuwingsproces is met tussentijden $A_1, A, \dots$, die een eindige verwachting hebben. Dan geldt dat de verwacht van de gemiddelde tijdsduur tot de eerstvolgende klant aankomt gelijk aan

$$\frac{1}{2} \frac{\mathbb{E} A_1^2}{\mathbb{E} A_1} > \frac{1}{2} \mathbb{E} A_1,$$

als de variantie van A groter dan 0 is.

5.3 De formules van Little en PASTA

Formules van Little We zullen de formule van Little eerst illustreren aan de hand van een voorbeeld. Beschouw een postkantoor waar per minuut gemiddeld $\bar{\lambda} = 2$ klanten *binnenkomen* (dat kan een andere waarde zijn dan het aantal dat per minuut gemiddeld aan de ‘poort’ komt!) en waar een klant gemiddeld $W = 3$ minuten verblijft. Op het moment dat de ‘gemiddelde’ klant na 3 minuten het systeem verlaat zijn er, gemiddeld genomen, zes nieuwe klanten gearriveerd. Laat L het gemiddeld aantal klanten in het postkantoor zijn, dan is het duidelijk dat $L = \bar{\lambda}W = 6$. De formule

$$L = \bar{\lambda}W$$

is de *formule van Little* en is een soort natuurwet in de wachttijdtheorie. Deze formule geeft het verband aan tussen het gemiddeld aantal klanten in het systeem (L) en de gemiddelde verblijftijd (W) in het systeem.

Definieer de volgende vijf stochastische variabelen:

- $\bar{N}(t)$ = het aantal *binnenkomsten* in het interval $[0, t]$;
- $L(t)$ = het aantal klanten in het systeem op tijdstip t ;
- $L_q(t)$ = het aantal klanten dat op bediening wacht op tijdstip t ;
- V_n = de verblijftijd van de n -de klant in het systeem;
- W_n = de wachttijd (tijd voordat de bediening begint) van de n -de klant in het systeem.

Vervolgens introduceren we de volgende vijf getallen:

- $\bar{\lambda}$ = $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{N}(t)}{t}$: de gemiddelde *binnenkomstsnelheid*;
- L = $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t L(s) ds$: het gemiddeld aantal klanten in het systeem;
- L_q = $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t L_q(s) ds$: het gemiddeld aantal klanten in de wachtrij;
- W = $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n V_m$: de gemiddelde verblijftijd van een klant in het systeem;
- W_q = $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n W_m$: de gemiddelde wachttijd van een klant in de wachtrij.

Deze limieten bestaan onder algemene voorwaarden, die erop neerkomen dat het systeem van tijd tot tijd leegraakt, waarbij de verwachting van de tijdsduur voordat het systeem leeg is eindig is.

We zullen nu eerst een intuïtieve verklaring geven voor de formule van Little. Veronderstel dat elke klant 1 euro betaalt voor iedere tijdseenheid die de klant in het systeem verblijft. De systeembeheerder ontvangt dan op de lange duur L euro per tijdseenheid. Anderzijds is het gemiddelde bedrag dat een klant betaalt op de lange duur W euro en per tijdseenheid komen gemiddeld $\bar{\lambda}$ klanten binnen. Als de klanten bij binnenkomst moeten betalen, dan ontvangt de systeembeheerder gemiddeld dus $\bar{\lambda}W$ euro per tijdseenheid. Hieruit volgt dat $L = \bar{\lambda}W$. We zullen nu een formeel bewijs geven.

Laat $I_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{als de } n\text{-de klant op tijdstip } t \text{ in het systeem is;} \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$

Dan geldt:

$$V_n = \int_0^\infty I_n(t)dt \text{ en } L(t) = \sum_{n=1}^\infty I_n(t).$$

Laat T_n de binnenkomsttijd zijn van de n -de klant, $X(t)$ de som van de verblijftijden van de klanten die in $[0, t]$ arriveren, d.w.z. $X(t) = \sum_{\{n|T_n \leq t\}} V_n$.

Stelling 5.1 *Neem aan dat $\bar{N}(t)$ een uitgesteld regeneratief proces is, met regeneratietijdstippen tijdstippen dat een klant in een leeg systeem binnenkomt. Als twee van de drie grootheden $\bar{\lambda}$, W en L bestaan en eindig zijn, dan dan bestaat de derde ook, zij is eindig, en er geldt $L = \bar{\lambda}W$.*

Bewijs

We nemen eerst aan dat alledrie grootheden bestaan en eindig zijn.

Laat ℓ_n het aantal klanten in het systeem zijn bij binnenkomst van de n -de klant (hij telt zelf niet mee). Dan is $\{\ell_n\}_n$ een (uitgesteld) regeneratief proces met regeneratietijdstippen de *nummers van de klanten* die in een leeg systeem binnenkomen. Laten $\tau_1, \tau_2, \dots$ deze nummers zijn. Met het vernieuwingsinterval $\tau_{i+1} - \tau_i$ associeren we een ‘opbrengst’ $R_{i+1} = \sum_{m=\tau_i}^{\tau_{i+1}-1} V_m$, dat is som van de verblijfsduren van de klanten die in het $i + 1$ -ste interval binnenkomen. Met behulp van de Opbrengst-vernieuwingsstelling 3.10 kun je laten zien dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=1}^n V_m}{n} = \frac{\mathbb{E} \left\{ \sum_{\tau_1}^{\tau_2-1} V_m \right\}}{\mathbb{E} \{ \tau_2 - \tau_1 \}}.$$

Laten $T_1, \dots$ de achtereenvolgende tijdstippen zijn dat een klant in een leeg systeem binnenkomt. Dan is $\tau_{i+1} - \tau_i$ precies het aantal klanten dat in $[T_i, T_{i+1})$ is binnengekomen. Met een redenering als boven volgt dat

$$\bar{\lambda} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{N}(t)}{t} = \frac{\mathbb{E} \{ \tau_2 - \tau_1 \}}{\mathbb{E} \{ T_2 - T_1 \}}.$$

Door combinatie krijgen we

$$\bar{\lambda}W = \frac{\mathbb{E} \left\{ \sum_{\tau_1}^{\tau_2-1} V_m \right\}}{\mathbb{E} \{ T_2 - T_1 \}} \quad (5.3.1)$$

Het proces $L(t)$, $t \geq 0$, vormt ook een (uitgesteld) regeneratief proces, met regeneratietijdstippen $T_1, T_2, \dots$. Dan geldt weer als boven

$$L = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t L(s) ds}{t} = \frac{\mathbb{E} \left\{ \int_{T_1}^{T_2} L(s) ds \right\}}{\mathbb{E} \{T_2 - T_1\}}. \quad (5.3.2)$$

Met een ‘betalingsargument’ analoog aan het argument voor de formulering van de stelling volgt dat

$$\mathbb{E} \left\{ \int_{T_1}^{T_2} L(s) ds \right\} = \mathbb{E} \left\{ \sum_{\tau_1}^{\tau_2-1} V_m \right\}.$$

Combinatie van (5.3.1) en (5.3.2) geeft de gestelde relatie. Je kunt nu zelf gemakkelijk nagaan dat het bestaan en eindig zijn van twee van de drie grootheden, het bestaan en eindig zijn van de derde impliceert.

□

Opmerking:

Een alternatieve vorm van de formule van Little krijgen we als we L definiëren als de het aantal klanten in het stationaire proces (we nemen hierbij dus aan dat het proces op de lange duur in een stationaire situatie komt). Dan is $\mathbb{E}\{L\} = \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot P_j$, waarbij P_j de kans is dat het stationaire proces j klanten heeft. Voor W nemen we de verblijftijd van een (gemiddelde) klant in het systeem. dan geldt:

$$\mathbb{E}\{L\} = \bar{\lambda} \mathbb{E}\{W\}.$$

Op analoge wijze kan ook de volgende stelling worden bewezen.

Stelling 5.2

Neem aan dat $\bar{N}(t)$ een uitgesteld regeneratief proces is, met regeneratietijdstippen tijdstippen dat een klant in een leeg systeem binnenkomt. Als twee van de drie grootheden $\bar{\lambda}$, W_q en L_q bestaan en eindig zijn, dan dan bestaat de derde ook, zij is eindig, en er geldt $L_q = \bar{\lambda} W_q$.

Gevolg 5.3 *Combinatie van de twee Little formules heeft een interessant gevolg. Immers, $W - W_q$ is precies de bedieningsduur van een klant, zeg deze is verdeeld als de stochastische grootheid S . Dan geldt*

$$\bar{\lambda} \mathbb{E}\{S\} = \bar{\lambda}(W - W_q) = L - L_q.$$

Als we een systeem met één bediende hebben, geldt $L - L_q = \sum_j j P_j - \sum_{j \geq 1} (j-1) P_j = 1 - P_0$. D.w.z. $P_0 = 1 - \bar{\lambda} \mathbb{E}\{S\}$!. Het getal $\bar{\lambda} \mathbb{E}\{S\}$ kan geïnterpreteerd worden als het verwachte aantal aankomsten per bedieningsduur, per bediende. Dit wordt ook wel de bedieningsintensiteit genoemd, een genoteerd met de letter ρ .

PASTA! Voor wachttijdsystemen met een Poisson aankomstproces geldt dat op de lange duur een binnenkomende klant het systeem in de gemiddelde situatie aantreft, onafhankelijk van hoe de verdeling van de bedieningsduur is, of anders gezegd: de fractie van de aankomende klanten die n klanten in het systeem aantreffen is gelijk aan de fractie van de tijd dat er n klanten in het systeem zijn. Deze eigenschap heet *PASTA* (= *Poisson Arrivals See Time Averages*).

Voor algemene aankomstprocessen geldt deze eigenschap niet. Beschouw namelijk een aankomstproces waarin de klanten precies om de twee minuten arriveren en een bedieningsduur van precies één minuut krijgen. Iedere klant die binnenkomt treft het systeem leeg aan, terwijl het systeem gemiddeld voor 50% van de tijd leeg is. We zullen nu deze PASTA-eigenschap plausibel maken.²

Laat $\{N(t), t \geq 0\}$ het Poisson aankomstproces (met parameter λ) beschrijven en $\{X(t), t \geq 0\}$ de evolutie van de toestand van het systeem zijn (bijv. het aantal klanten in het systeem op tijdstip t). De PASTA-eigenschap houdt in dat op de lange termijn geldt:

De fractie van het aantal aankomende klanten dat het systeem in een bepaalde toestandsverzameling aantreft is de fractie van de tijd dat het systeem in die bepaalde toestandsverzameling verkeert.

We veronderstellen dat het proces $\{X(t), t \geq 0\}$ een *regeneratief proces* is, d.w.z. dat er (stochastische) tijdstippen zijn (*regeneratiepunten*), waarop het systeem - kanstheoretisch gezien - opnieuw begint (bijv. de tijdstippen waarop het systeem leeg raakt). De perioden tussen de regeneratiepunten heten *cykels*.

Zij T de (stochastische) lengte van een cykel, met $0 < \mathbb{E}T < \infty$, N het (stochastische) aantal aankomsten gedurende een cykel en laat A een toestandsverzameling zijn.

Definieer verder:

$T_A =$ de tijdsduur dat het systeem gedurende een cykel in toestandsverz. A is;

$N_A =$ het aantal aankomsten tijdens een cykel dat het systeem in toestandsverz. A aantreft.

Nu kan worden bewezen dat

$$\mathbb{E}(N_A) = \lambda \mathbb{E}(T_A) \quad (5.3.3)$$

voor iedere toestandsverz. A . Door voor A alle toestanden te nemen krijgen we $\mathbb{E}(N) = \lambda \mathbb{E}(T)$, zodat

$$\frac{\mathbb{E}(N_A)}{\mathbb{E}(N)} = \frac{\mathbb{E}(T_A)}{\mathbb{E}(T)}.$$

Met behulp van vernieuwingstheorie³ geldt dat $\frac{\mathbb{E}(N_A)}{\mathbb{E}(N)}$ de fractie van de aankomende klanten op de lange duur is die het systeem in de toestandsverz. A aantreffen en dat $\frac{\mathbb{E}(T_A)}{\mathbb{E}(T)}$ de fractie van

²Voor een formeel bewijs, zie: R.W. Wolf: *Poisson arrivals see time averages*, Operations Research **30** (1982) 223–231.

³zie betreffende hoofdstuk, zie ook S.M. Ross: *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Holden-Day, 1970 (chapter 3).

de tijd, op de lange duur, is dat het systeem in toestand A is. Hiermee is de PASTA-eigenschap verklaard.

Vraag 5.1

Geef een intuïtieve verklaring met een 'betaalregel' dat $L_q = \bar{\lambda}W_q$.

Vraag 5.2

Een wachttijdsysteem heeft twee bedienden en het systeem kan maximaal 5 klanten bevatten. De stationaire kansverdeling is als volgt: $P_0 = 0.05$, $P_1 = 0.15$, $P_2 = 0.25$, $P_3 = 0.25$, $P_4 = 0.20$ en $P_5 = 0.10$. Bepaal voor dit model de grootheden L , L_q en de bedieningsintensiteit ρ .

5.4 Geboorte-sterfte processen (vervolg)

We hebben in paragraaf 5.3 gezien dat geboorte-sterfte processen een speciaal geval zijn van een continue Markov keten. Dit impliceert dat λ_n en μ_n de gemiddelde geboorte- resp. sterftesnelheid is als het systeem zich in toestand n bevindt. Verder hebben we gezien dat voor de stationaire kansen P_j , geldt:

$$P_n = \frac{C_n}{\sum_{n=0}^{\infty} C_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (5.4.1)$$

waarbij $C_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1}$, $n = 1, 2, \dots$ en $C_0 = 1$.

Voor de gemiddelde aankomstsnelheid $\bar{\lambda}$ (om niet in verwarring te komen met de λ van het aankomstproces gebruiken we - anders dan in de formule van Little - hier de notatie $\bar{\lambda}$) geldt: $\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n$. Met behulp van (5.4.1) en de formule van Little zijn de karakteristieke grootheden L , L_q , W en W_q , die informatie geven over de *performance* van het systeem, als volgt te bepalen (dit heet de *mean-value technique*):

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n; \quad L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) P_n; \quad \bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n; \quad W = \frac{L}{\bar{\lambda}}; \quad W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} \quad (5.4.2)$$

In welke verdeling zien aankomende klanten het systeem? Met een zelfde redenering als in de vorige paragraaf krijgen we dat $\mathbb{E}(N_i)$, het gemiddeld aantal klanten per cykel dat bij aankomst i klanten in het systeem ziet, gelijk is aan $\lambda_i \mathbb{E}T_i$, met T_i de tijd gedurende een cykel dat i klanten aanwezig zijn. Immers, gedurende de perioden dat er i klanten zijn, 'gedraagt' het aankomstproces zich als een Poisson(λ_i) aankomstproces. Dus is $\mathbb{E}N = \sum_i \mathbb{E}N_i = \sum_i \lambda_i \mathbb{E}T_i$.

De fractie Π_i van het aantal klanten per cykel dat bij aankomst i klanten aantreft is dus gelijk aan

$$\Pi_i = \frac{\mathbb{E}N_i}{\mathbb{E}N} = \frac{\lambda_i \mathbb{E}T_i}{\sum_j \lambda_j \mathbb{E}T_j} = \frac{\lambda_i \mathbb{E}T_i / \mathbb{E}T}{\sum_j \lambda_j \mathbb{E}T_j / \mathbb{E}T} = \frac{\lambda_i P_i}{\sum_j \lambda_j P_j} = \frac{\lambda_i}{\bar{\lambda}} P_i, \quad (5.4.3)$$

dit wordt de *stationaire verdeling van aankomende klanten* genoemd.

Bovenstaande resultaten zijn afgeleid onder de aanname dat de stationaire situatie wordt bereikt, dat wil zeggen als $\sum_{n=0}^{\infty} C_n < \infty$.

Uit vergelijking (5.4.3) kunnen we nog afleiden van welk geboorte-sterfte proces de stationaire verdeling voor aankomende klanten de stationaire verdeling is. Immers, er geldt

$$\frac{\Pi_{i+1}}{\Pi_i} = \frac{\lambda_{i+1}P_{i+1}}{\lambda_i P_i} = \frac{\lambda_{i+1}P_{i+1}}{\mu_{i+1}P_{i+1}} = \frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}}.$$

M.a.w., $\mu_{i+1}\Pi_{i+1} = \lambda_{i+1}\Pi_i$, $i = 0, \dots$. Dit impliceert dat Π_i , $i = 0, \dots$ de stationaire verdeling is van het geboorte-sterfte proces met geboorteparameter λ_{i+1} en sterfteparameter μ_i in toestand $i \geq 0$ (waarbij $\mu_0 = 0$).

Vraag 5.3

Klanten komen bij een kapperszaak aan volgens een Poissonproces met een gemiddelde van 3 per uur. Er is slechts één kapper en de behandeltijd van de klanten is exponentieel met een gemiddelde van 30 minuten. Een aankomende klant gaat met kans $\frac{1}{3}n$ weg als er reeds $n \geq 3$ klanten in de zaak aanwezig zijn. De kapper verdient 20 euro per klant.

Wat is zijn verlies aan klanten die direct weer weggaan?

5.5 Modellen gebaseerd op het geboorte-sterfte proces

We zullen in deze paragraaf een aantal modellen uitwerken die gebaseerd zijn op het geboorte-sterfte proces. Om een bepaald wachtrijsprobleem aan te geven gebruiken we de volgende notatie, afkomstig van D.G. Kendall:

$$a/b/c; d/e/f$$

waarbij

- a : het aankomstproces aangeeft;
- b : de bedieningsduur aangeeft;
- c : het aantal bedienden voorstelt;
- d : de bedieningsdiscipline weergeeft;
- e : het maximum aantal klanten in het systeem is;
- f : het aantal elementen in de klantenbron voorstelt.

Als d de FIFO-regel is (first-in-first-out) en $e = f = \infty$, dan laten we het stuk $d/e/f$ in de notatie weg. Zowel Poisson input (tussentijden exponentieel verdeeld) als een exponentiële bedieningsduur worden aangegeven met de letter M van Markov. Voor een deterministische kansverdeling wordt de letter D gebruikt en voor een algemene kansverdeling de letter G .

a. Het M/M/1 model

Dit is het meest eenvoudige wachttijdmodel. Klanten komen aan volgens een Poisson proces met parameter λ ; de bedieningstijd van een klant is exponentieel verdeeld met parameter μ , er is één

bediende en er is een oneindig grote wachtruimte. We veronderstellen in dit model dat $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$; ρ heet de *bedieningsintensiteit*.

Dit model is een geboorte-sterfte proces waarin $\lambda_n = \lambda$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$ en $\mu_n = \mu$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, zodat $C_n = \rho^n$ voor $n = 0, 1, \dots$. Uit de formules (5.4.1) en (5.4.2) volgt:

$$P_n = \frac{\rho^n}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n} = (1 - \rho)\rho^n, n \in \mathbb{N}_0 \quad (5.5.1)$$

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P_n = (1 - \rho) \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\rho^n = (1 - \rho)\rho^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \rho^{n-1}}{\partial \rho} \\ &= (1 - \rho)\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n-1} = (1 - \rho)\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} (1 - \rho)^{-1} = \frac{\rho^2}{1 - \rho} \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)}; \quad W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu(1 - \rho)}; \quad L = \lambda W = \frac{\rho}{1 - \rho} \quad (5.5.3)$$

In de formules voor L , L_q , W en W_q zien we dat in de noemer de term $(1 - \rho)$ staat. Dit betekent dat deze grootheden snel toenemen als de bezettingsgraad toeneemt. Als de bezettingsgraad toeneemt van 90% naar 95% (een toename van 5%), dan nemen deze grootheden met 100% toe. We spreken dan ook van een *exponentiële toename*.

De bediende in dit systeem is dus afwisselend bezig en vrij. De fractie van de tijd dat de bediende vrij is, is gelijk aan P_0 , dus $1 - \rho$. De gemiddelde tijd dat de bediende vrij is, is de gemiddelde tijd tot er weer een klant binnenkomt. Vanwege de geheugenloosheid van de exponentiële verdeling is deze tijdsduur $\frac{1}{\lambda}$. De *regeneratietijd* is dus $\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{1 - \rho}$ en de gemiddelde tijdsduur dat de bediende bezig is, is dus $\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{1 - \rho} \cdot (1 - P_0) = \frac{\rho}{\lambda(1 - \rho)} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1 - \rho}$, wat gelijk is aan W , de tijd die een klant in het systeem verblijft.

Voorbeeld 5.1

Veronderstel dat schepen in een haven aankomen volgens een Poisson proces met een gemiddelde van 5 schepen per etmaal. De havendirectie moet een beslissing nemen over de aanschaf van een kraan om de schepen te lossen. De dagelijkse kosten van de kraan zijn $5000 \times \mu$ euro, waarbij de lostijd per schip exponentieel verdeeld is met parameter μ (de gemiddelde lostijd per schip is $1/\mu$ uur). Gedurende 24 uur per etmaal kan er worden gelost. Voor elk schip zijn er verblijfskosten van 25 euro per uur dat het in de haven verblijft (ook voor de lostijd moet worden betaald). De directie moet een beslissing nemen over de keuze van μ en wil die keuze zó maken dat de totale kosten per etmaal minimaal zijn. Welke waarde van μ is optimaal?

Dit is een $M/M/1$ -model. Laten we een uur als tijdseenheid nemen, dan is $\lambda = \frac{5}{24}$.

De gemiddelde ligkosten (per uur) van de schepen $= 25 \times L = \frac{25\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{125}{24\mu - 5}$.

De gemiddelde kosten (per uur) voor de kraan zijn $\frac{5000}{24}\mu$.

Voor de kostenfunctie $f(\mu)$ geldt dus: $f(\mu) = \frac{125}{24\mu - 5} + \frac{5000}{24}\mu$.

$f'(\mu) = 0$ geeft: $-\frac{24 \times 125}{(24\mu - 5)^2} + \frac{5000}{24} = 0$, waaruit volgt $(24\mu - 5)^2 = \frac{24^2 \times 125}{5000} = 14.4$,

zodat $24\mu - 5 = \sqrt{14.4} = 3.7947$. Aldus vinden we $\mu = 0.3664$.

De verdeling van de verblijftijd

Zij W^* de tijd die een willekeurige aankomende klant in het systeem verblijft, als het systeem zich in een stationaire situatie bevindt, dus $\mathbb{E}\{W^*\} = W$. Om de kansverdeling van W^* te bepalen conditioneren we naar het aantal klanten dat in het systeem aanwezig is op het moment dat de aankomende klant arriveert:

$$\mathbb{P}\{W^* \leq t\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{W^* \leq t \mid n \text{ klanten in het systeem als de aankomende klant arriveert}\} \cdot \mathbb{P}\{n \text{ klanten in het systeem als de aankomende klant arriveert}\}.$$

Uit de PASTA-eigenschap volgt:

$$\mathbb{P}\{n \text{ klanten in het systeem als de aankomende klant arriveert}\} = P_n = (1 - \rho)\rho^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Als $n = 0$, dan is de verblijftijd van de aankomende klant gelijk aan zijn bedieningsduur; als $n \geq 1$, dan ontvangt één klant bediening en zijn er $n - 1$ klanten die eerst geholpen moeten worden voordat de aankomende klant zijn bediening ontvangt. Vanwege de geheugenloosheid van de exponentiële verdeling, is de resterende bedieningsduur van de klant die in bediening is weer exponentieel (met dezelfde parameter μ).

Voor verblijftijd $T^{(n)}$ van de aankomende klant die n klanten in het systeem aantreft geldt dus:

$$T^{(n)} = T_1 + T_2 + \cdots + T_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

met $T_1, T_2, \dots, T_{n+1}$ onderling onafhankelijke identiek verdeelde stochastische variabelen die elk negatief exponentieel verdeeld zijn met parameter μ . Dit heet een *Erlang- $(n+1)$* verdeling.⁴ Er kan worden aangetoond (zie Opgave 5.9) dat $T^{(n)}$ als dichtheid $\mu e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^n}{n!}$ heeft, zodat geldt:

$$\mathbb{P}\{W^* \leq t \mid n \text{ klanten in het systeem}\} = \int_0^t \mu e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^n}{n!} dx.$$

We kunnen nu schrijven:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{W^* \leq t\} &= \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \rho)\rho^n \cdot \int_0^t \mu e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^n}{n!} dx = (1 - \rho) \int_0^t \mu e^{-\mu x} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^n}{n!} \right\} dx \\ &= (\mu - \lambda) \int_0^t e^{-(\mu - \lambda)x} dx = 1 - e^{-(\mu - \lambda)t}. \end{aligned}$$

De verblijftijd is dus ook exponentieel verdeeld met parameter $\mu - \lambda$. De verwachting hiervan is $\frac{1}{\mu - \lambda}$, wat overeenkomt met de formule voor de gemiddelde verblijftijd W .

b. Het M/M/s model

De analyse van dit model is in principe hetzelfde als voor het $M/M/1$ -model, alleen hebben we nu s bedienden en veronderstellen we dat $\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$. Deze ρ heeft de interpretatie de fractie van de tijd waarin een individuele bediende bezet is.

In dit geboorte-sterfte proces is $\lambda_n = \lambda$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$ en $\mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{voor } 1 \leq n \leq s - 1; \\ s\mu & \text{voor } n \geq s. \end{cases}$

$$\text{Hieruit volgt } C_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} & \text{voor } n < s; \\ \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \rho^{n-s} & \text{voor } n \geq s. \end{cases}$$

⁴Naar de Deense wiskundige Erlang, de grondlegger van de wachttijdtheorie, begin twintigste eeuw.

Uit de formules (5.4.1) en (5.4.2) volgt:

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \sum_{n=s}^{\infty} \rho^{n-s} \right\}^{-1} = \left\{ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \frac{1}{1-\rho} \right\}^{-1}.$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \cdot P_0 & \text{voor } n < s; \\ \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \rho^{n-s} \cdot P_0 & \text{voor } n \geq s. \end{cases}$$

Vervolgens gaan we L_q berekenen:

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s)P_n = \sum_{j=0}^{\infty} jP_{s+j} = \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \rho^j P_0$$

$$= \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \rho P_0 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} j \rho^j = \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \rho P_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \right\}.$$

Omdat $\frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \right\} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ (1-\rho)^{-1} \right\} = (1-\rho)^{-2}$, krijgen we:

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \rho P_0 \cdot (1-\rho)^{-2} = \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \cdot \left\{ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \frac{1}{1-\rho} \right\}^{-1}. \quad (5.5.4)$$

Hieruit volgen de overige grootheden volgens de formule van Little:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}; \quad W = W_q + \frac{1}{\mu}; \quad L = \lambda W. \quad (5.5.5)$$

In de formules voor L , L_q , W en W_q is weer te zien dat in de noemer de term $(1-\rho)$ voorkomt; ook hier hebben we dus weer een exponentiële toename als ρ naar 1 nadert.

De fractie van de tijd dat alle bedienden bezet zijn is:

$$\sum_{n=s}^{\infty} P_n = P_0 \sum_{n=s}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \cdot \rho^{n-s} = \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot P_0 (1-\rho)^{-1}.$$

Op grond van de PASTA-eigenschap volgt hieruit dat de fractie van de klanten die moeten wachten ook gelijk is aan $\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot P_0 (1-\rho)^{-1}$. Deze laatste formule voor de kans dat een aankomende klant moet wachten voordat hij bediening ontvangt heet de *Erlang wachtformule*.

Voorbeeld 5.2

In een postkantoor zijn twee loketten, één voor geldzaken en één voor postzaken. De klanten voor geldzaken komen aan volgens een Poisson proces met een aankomstsnelheid van 15 klanten per uur; de klanten voor postzaken komen, onafhankelijk van de klanten voor geldzaken, aan volgens een Poisson proces met een aankomstsnelheid van 18 klanten per uur.

De bedieningsduur van elke klant is exponentieel verdeeld met een verwachting van 3 minuten. Bij de huidige inrichting kan een klant voor geldzaken alleen terecht bij het loket geldzaken en kan een klant voor postzaken alleen terecht bij het loket postzaken.

Overwogen wordt beide loketten open te stellen voor zowel geld- als postzaken met één gezamenlijke wachtrij voor de loketten. Wat is het effect van de nieuwe inrichting op de bezetting van de loketten en op het gemiddelde aantal klanten in het postkantoor?

Kies als tijdseenheid een uur.

In de huidige situatie hebben we twee onafhankelijke $M/M/1$ systemen.

Voor het loket geldzaken is $\lambda = 15$, $\mu = 20$, dus de fractie van de tijd dat dit loket bezet is is $\rho = \frac{3}{4}$. Het gemiddeld aantal klanten voor geldzaken $L_{geld} = \frac{\rho}{1-\rho} = 3$. De wachttijd voordat de klant aan de beurt is bedraagt $\frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = 0.15$ uur (9 minuten).

Voor het loket postzaken is $\lambda = 18$, $\mu = 20$, dus de fractie van de tijd dat dit loket bezet is is $\rho = \frac{9}{10}$. Het gemiddeld aantal klanten voor postzaken $L_{post} = \frac{\rho}{1-\rho} = 9$. De wachttijd voordat de klant aan de beurt is bedraagt $\frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = 0.45$ uur (27 minuten).

Dus in totaal zijn gemiddeld $3 + 9 = 12$ klanten in het postkantoor aanwezig.

Beschouw vervolgens de situatie, waarin beide loketten beschikbaar zijn voor zowel geld- als postzaken. Dit is een $M/M/2$ systeem met $\lambda = 15 + 18 = 33$, $\mu = 20$, dus $\rho = 0.825$. Uit de formules van het $M/M/2$ systeem volgt:

$$P_0 = 0.0959; L_q = 3.516; W_q = 0.107; W = 0.157; L = 5.166.$$

We zien dus dat in het geval van samenvoegen van de loketten zowel het gemiddeld aantal klanten in het systeem flink daalt (van 12 naar 5.166) als dat de gemiddelde wachttijd van beide soort klanten eveneens sterk daalt (van 0.15 naar 0.107 resp. van 0.45 naar 0.107). Deze laatste daling is niet altijd het geval; als de λ 's sterk verschillen, dan kunnen de klanten met de kleinste λ er door het samenvoegen op achteruitgaan.

Een andere vraag is hoe het $M/M/2$ systeem met bedieningssnelheid μ zich verhoudt tot het $M/M/1$ systeem met bedieningssnelheid 2μ . Laat het gemiddeld aantal klanten dat wacht $L_q(2)$ resp. $L_q(1)$ zijn en het aantal klanten in het systeem $L(2)$ resp. $L(1)$. Neem $\lambda = 15$ en $\mu = 10$ (dus $\rho = \frac{3}{4}$), dan hebben we hierboven gezien dat $L(1) = 3$. Uit de formules van het $M/M/1$ model volgt dat $L_q(1) = \frac{9}{4}$. Voor het $M/M/2$ model (waarin ρ dus weer $\frac{3}{4}$ is) krijgen we: $L_q(2) = \frac{27}{14}$ en $L(2) = \frac{24}{7}$. We zien dus het opmerkelijke verschijnsel dat $L_q(2) < L_q(1)$, terwijl $L(2) > L(1)$.

Dit resultaat hangt niet van de gekozen getallen af, maar geldt algemeen (zie Opgave 5.10).

Opmerking:

Als $s = \infty$ (altijd voldoende bedienden), dan is $C_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}$, zodat $P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} e^{-\lambda/\mu}$ voor alle n , d.w.z. dat de stationaire kansen Poisson-verdeeld zijn met parameter λ/μ .

c. Het $M/M/s$; FIFO/ N/∞ model

In dit model kunnen er maximaal N klanten in het systeem zijn. We nemen bovendien aan dat $s \leq N$ (het is duidelijk dat $s > N$ zinloos is). In termen van het geboorte-sterfte proces betekent dit dat:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{voor } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{voor } n \geq N \end{cases} \quad \text{en } \mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{voor } 1 \leq n \leq s-1 \\ s\mu & \text{voor } n \geq s \end{cases}$$

$$\text{Hieruit volgt } C_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} & \text{voor } 0 \leq n \leq s-1; \\ \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} & \text{voor } s \leq n \leq N. \end{cases}$$

Laat weer $\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$ (we hoeven nu niet te eisen dat $\rho < 1$, want omdat er maximaal N klanten zijn kan het systeem zich niet 'opblazen'). Uit de formules (5.4.1) en (5.4.2) volgt weer:

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \sum_{n=s}^N \rho^{n-s} \right\}^{-1}.$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \cdot P_0 & \text{voor } 0 \leq n \leq s-1; \\ \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \rho^{n-s} \cdot P_0 & \text{voor } s \leq n \leq N; \\ 0 & \text{voor } n > N. \end{cases}$$

P_N is niet alleen de fractie van de tijd dat het systeem vol is, maar - op grond van de PASTA-regel - ook de fractie van de tijd dat een aankomende klant het systeem vol aantreft, d.w.z. dat de klant geweigerd wordt; dit heet de *blokkeringskans*.

Als $N = s$, d.w.z. dat er geen ruimte aanwezig is om te wachten, dan geldt $P_N = \frac{(\lambda/\mu)^s/s!}{\sum_{n=0}^s (\lambda/\mu)^n/n!}$. Dit heet de *Erlang verliesformule*. Ook nu gaan we eerst L_q berekenen:

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=s}^{\infty} (n-s)P_n = \sum_{j=0}^{N-s} jP_{s+j} = \sum_{j=0}^{N-s} j \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \rho^j P_0 \\ &= \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \rho P_0 \cdot \sum_{j=0}^{N-s} \frac{\partial \rho^j}{\partial \rho} = \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \rho P_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \sum_{j=0}^{N-s} \rho^j \right\}. \end{aligned}$$

Omdat $\frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \sum_{j=0}^m \rho^j \right\} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho} \right\} = \frac{1}{(1-\rho)^2} \cdot \{1 - \rho^m - m\rho^m(1-\rho)\}$, krijgen we:

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \cdot \{1 - \rho^{N-s} - (N-s)\rho^{N-s}(1-\rho)\} P_0.$$

Vervolgens berekenen we $\bar{\lambda}$:

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n = \sum_{n=0}^{N-1} \lambda P_n = \lambda(1 - P_N) = \lambda \left\{ 1 - \frac{\rho^N s^s}{s!} P_0 \right\}.$$

Hieruit volgen de overige grootheden volgens de formule van Little:

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}; \quad W = W_q + \frac{1}{\mu}; \quad L = \bar{\lambda}W.$$

Voorbeeld 5.3

Beschouw een kapperszaak met 3 stoelen en daarnaast is nog plaats voor 4 wachtende klanten. De potentiële klanten komen aan volgens een Poisson proces met een gemiddelde van één klant per 4 minuten. Een behandeling heeft een exponentiële bedieningsduur met een gemiddelde van 24 minuten. Gevraagd worden L , W en het verwachte aantal klanten dat per uur verloren gaat. Dit is een $M/M/s; FIFO/N/\infty$ -model met $s = 3$ en $N = 7$.

Neem als tijdseenheid een uur, dan is $\lambda = 15$, $\mu = \frac{5}{2}$, $\rho = \frac{\lambda}{s\mu} = 2$. We krijgen nu de volgende waarden.

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^2 \frac{6^n}{n!} + \frac{6^3}{3!} \sum_{n=3}^7 2^{n-3} \right\}^{-1} = \frac{1}{1141} \text{ en } P_7 = \frac{6^3}{3!} \cdot 2^4 P_0 = \frac{576}{1141}.$$

$$L_q = \frac{6^3}{3!} \cdot \frac{2}{(1-2)^2} \{1 - 2^4 - 4 \cdot 2^4(1-2)\} P_0 = \frac{3528}{1141} \approx 3.09 \text{ personen.}$$

$$\bar{\lambda} = \lambda(1 - P_7) = \frac{8475}{1141}.$$

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} = \frac{3528}{8475} \approx 0.41 \text{ uur} \approx 25 \text{ minuten.}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \approx 0.81 \text{ uur} \approx 49 \text{ minuten.}$$

$$L = \bar{\lambda}W = \frac{6918}{1141} \approx 6.06 \text{ personen.}$$

Het verwachte aantal klanten dat per uur verloren gaat is $\lambda P_7 = \frac{8640}{1141} \approx 7.57$.

Voor het speciale geval $s = 1$ krijgen we de volgende formules voor P_0 , $\bar{\lambda}$ en L_q (merk op dat deze voor $N \rightarrow \infty$ overeenkomen met de formules van het $M/M/1$ model):

$$\begin{aligned} P_0 &= \left\{ 1 + \rho \cdot \sum_{n=1}^N \rho^{n-1} \right\}^{-1} = \left\{ 1 + \rho \cdot \frac{1 - \rho^N}{1 - \rho} \right\}^{-1} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}}. \\ \bar{\lambda} &= \lambda \cdot \{1 - \rho^N P_0\} = \lambda \cdot \frac{1 - \rho^N}{1 - \rho^{N+1}}. \\ L_q &= \frac{\rho^2}{(1 - \rho)^2} \cdot \{1 - \rho^{N-1} - (N-1)\rho^{N-1}(1 - \rho)\} \cdot \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}} \\ &= \frac{\rho^2}{1 - \rho} \cdot \{1 - N\rho^{N-1} + (N-1)\rho^N\} \cdot \frac{1}{1 - \rho^{N+1}}. \end{aligned}$$

Hoewel we opgemerkt hebben dat dit model geldig is voor alle waarden van ρ , geven de formules problemen als $\rho = 1$. In dat geval moeten de formules wel op analoge wijze worden berekend, maar leidt dit tot andere uitkomsten. We zullen dit laten zien voor het geval dat $s = 1$.

$$\begin{aligned} P_0 &= \{1 + \sum_{n=1}^N 1\}^{-1} = \frac{1}{N+1}; \quad P_j = \frac{1}{N+1}, \quad 1 \leq j \leq N; \quad L_q = \sum_{n=0}^{N-1} j P_{j+1} = \frac{1}{2} \frac{(N-1)N}{N+1}; \\ \bar{\lambda} &= \lambda \cdot (1 - P_0) = \lambda \cdot \frac{N}{N+1}; \quad W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} = \frac{N-1}{2\lambda}; \quad W = W_q + \frac{1}{\mu} = W_q + \frac{1}{\lambda} = \frac{N+1}{2\lambda}; \quad L = \bar{\lambda}W = \frac{N}{2}. \end{aligned}$$

d. Het M/M/s; FIFO/N/N model

In dit model is er een eindige klantenbron met N elementen. Dus als er in het systeem reeds n klanten aanwezig zijn, dan is het aantal potentiële klanten $N - n$. Het aantal bedienden s is weer hoogstens N . We nemen aan dat iedere klant zich (onafhankelijk van elkaar) volgens een Poissonproces met parameter λ kan melden. Dit geeft de volgende schematische voorstelling van

de stationaire situatie: $\lambda_n = (N - n)\lambda$, $0 \leq n \leq N$ en $\mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{voor } 1 \leq n \leq s-1; \\ s\mu & \text{voor } s \leq n \leq N. \end{cases}$

Hieruit volgt: $C_n = \begin{cases} \frac{N!}{(N-n)!n!} \cdot (\lambda/\mu)^n & \text{voor } 0 \leq n \leq s-1 \\ \frac{N!}{(N-n)!s!s^{n-s}} \cdot (\lambda/\mu)^n & \text{voor } s \leq n \leq N \end{cases} \text{ en}$

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{N!}{(N-n)!n!} \cdot (\lambda/\mu)^n + \frac{N!s^s}{s!} \sum_{n=s}^N \frac{1}{(N-n)!s^n} \cdot (\lambda/\mu)^n \right\}^{-1}. \quad (5.5.6)$$

De berekening van de vier karakteristieke getallen verloopt als volgt:

$$\begin{aligned}\bar{\lambda} &= \sum_{n=0}^N \lambda_n P_n = \sum_{n=0}^N \lambda(N-n)P_n = \lambda N \sum_{n=0}^N P_n - \lambda \sum_{n=0}^N n P_n = \lambda(N-L). \\ L_q &= \sum_{n=s}^N (n-s)C_n P_0.\end{aligned}$$

Omdat $L = L_q + \frac{\bar{\lambda}}{\mu} = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \cdot (N-L)$, volgt hieruit dat $L = \frac{\lambda N + \mu L_q}{\lambda + \mu}$.

Met behulp van (5.5.6) levert dit de volgende formules op:

$$\begin{aligned}P_n &= \frac{N!s^s}{(N-s)!s!s^n} \cdot (\lambda/\mu)^n P_0, \quad s \leq n \leq N. \\ L_q &= \sum_{n=s}^N (n-s)P_n; \quad L = \frac{\lambda N + \mu L_q}{\lambda + \mu}; \quad \bar{\lambda} = \lambda(N-L); \quad W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}; \quad W = \frac{L}{\bar{\lambda}}.\end{aligned}$$

Tenslotte beschouwen we weer het speciale geval $s = 1$, waarvoor de volgende formules voor P_0 en L_q gelden:

$$\begin{aligned}P_0 &= \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{N!}{(N-n)!} \cdot (\lambda/\mu)^n \right\}^{-1}. \\ L_q &= \sum_{n=1}^N (n-1)P_n = L - (1 - P_0) = \frac{\lambda N + \mu L_q}{\lambda + \mu} - (1 - P_0).\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$L_q = N - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} \cdot (1 - P_0).$$

In paragraaf 5.4 hebben we afgeleid dat de stationaire verdeling voor aankomende klanten de stationaire verdeling is van een geboorte-sterfte proces met ‘omlaag verschoven’ geboorteparameters, d.w.z. λ_{i+1} is de geboorteparameter in toestand i . In het geval van het M/M/s;FIFO/N/N model impliceert dit dat de stationaire verdeling van aankomende klanten gelijk is aan de stationaire verdeling van het M/M/s;FIFO/N-1/N-1 model! Dus, een aankomende klant ‘ziet’ het systeem als het systeem met een klantenbron die één klant minder heeft!

Vraag 5.4

Een bank heeft één drive-in loket open. Klanten komen aan volgens een Poissonproces met een gemiddelde tussentijd van 40 seconden. De bediening duurt gemiddeld 30 seconden en is exponentieel verdeeld.

Op de oprit naar het loket is slechts plaats voor 3 wachtende auto’s; zijn er meer klanten, dan sluiten deze aan in de wachtrij die een deel van de straat in beslag neemt.

Om de klanten tevreden te houden vindt de directie van de bank dat aan de volgende twee voorwaarden voldaan moet zijn:

- (1) de gemiddelde wachttijd van een klant voordat deze bediend wordt mag niet langer zijn dan 1 minuut;
- (2) de wachtrij mag niet meer dan 10% van de tijd een deel van de straat in beslag nemen.

Is aan deze voorwaarden voldaan? Zo niet, lost een tweede (identiek) loket het probleem op?

Beschouw vervolgens het probleem met de extra voorwaarde dat niet op straat mag worden gewacht (het aantal auto's in de wachtrij is dus hoogstens 3). De directie stelt in dit geval als eis dat tenminste 95% van de aankomende klanten in het systeem moet worden toegelaten. Zijn twee loketten nu voldoende?

Vraag 5.5

Tijdens het oogsten komen met graan geladen wagens bij een verzamelpunt waar ze gelost worden. Veronderstel dat het aankomstproces Poisson is met gemiddeld 9 aankomsten per uur en dat de lostijd exponentieel verdeeld is met een gemiddelde van 6 minuten.

Bereken de verwachting van de tijd die een wagen bij dit verzameldepot verblijft.

Om deze tijd te verkorten worden drie voorstellen gedaan:

- De capaciteit van het lossen vergroten waardoor de lostijd gemiddeld 4 minuten wordt.
- Een tweede loseenheid installeren op dit verzamelpunt met eveneens een gemiddelde lostijd van 6 minuten.
- Een extra verzamelpunt elders maken dat verder identiek is aan het huidige en de wagens over beide verzamelpunten gelijk verdelen.

Wat wordt in ieder van deze drie voorstellen de verwachte verblijftijd van een wagen bij het lossen?

Vraag 5.6

In een werkplaats staan N machines. De levensduur van elke machine is exponentieel verdeeld met verwachting $\frac{1}{\lambda}$. Een machine die kapot gaat wordt hersteld door een reparateur, waarna de machine weer als nieuw is. De reparatietijd is ook exponentieel verdeeld met verwachting $\frac{1}{\mu}$.

Er zijn $s \leq N$ reparateurs beschikbaar. De chef van de werkplaats wil de kans dat het werk volledig stil ligt (t.g.v. defecten aan alle machines) bepalen.

- Modelleer dit probleem als wachtrijmodel; stel de balansvergelijkingen op.
- Los het probleem op voor $N = 3$, $\lambda = 1$, $\mu = 2$ en $s = 2$.

5.6 Het M/G/1 model

Veronderstel dat de bedieningsduur B een willekeurige tijdsduur heeft met verwachting τ , variatie σ^2 en dichtheid $f(t)$. Per tijdseenheid komen gemiddeld λ klanten aan die dus gemiddeld per tijdseenheid $\lambda\tau$ aan bediening nodig hebben. We veronderstellen daarom dat $\lambda\tau < 1$ en dat er een stationaire situatie ontstaat.

Zij N_k het aantal klanten in het systeem als de k -de klant net vertrokken is na een bediening gehad te hebben, en laat X_k het aantal klanten zijn dat binnenkomt terwijl de k -de klant bediend wordt:

$$N_{k+1} = \begin{cases} N_k + X_{k+1} - 1 & \text{als } N_k \geq 1; \\ X_{k+1} & \text{als } N_k = 0. \end{cases}$$

Laat

$$\delta(N_k) = \begin{cases} 1 & \text{als } N_k \geq 1; \\ 0 & \text{als } N_k = 0. \end{cases}$$

We kunnen nu schrijven $N_{k+1} = N_k + X_{k+1} - \delta(N_k)$, zodat

$$\begin{aligned} N_{k+1}^2 &= N_k^2 + X_{k+1}^2 + \delta(N_k)^2 + 2N_k X_{k+1} - 2N_k \delta(N_k) - 2X_{k+1} \delta(N_k) \\ &= N_k^2 + X_{k+1}^2 + \delta(N_k) + 2N_k X_{k+1} - 2N_k - 2X_{k+1} \delta(N_k), \end{aligned}$$

waaruit volgt:

$$\mathbb{E}\{N_{k+1}\} = \mathbb{E}\{N_k\} + \mathbb{E}\{X_{k+1}\} - \mathbb{E}\{\delta(N_k)\}$$

en

$$\mathbb{E}\{N_{k+1}^2\} = \mathbb{E}\{N_k^2\} + \mathbb{E}\{X_{k+1}^2\} + \mathbb{E}\{\delta(N_k)\} + 2\mathbb{E}\{N_k\} \cdot \mathbb{E}\{X_{k+1}\} - 2\mathbb{E}\{N_k\} - 2\mathbb{E}\{X_{k+1}\} \cdot \mathbb{E}\{\delta(N_k)\}.$$

Vanwege de aanname dat er een stationaire situatie ontstaat, geldt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}\{N_k\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}\{N_{k+1}\}.$$

Laat voor de stationaire grootheden de index k weg. Dit levert het volgende op.

Uit de formule van $\mathbb{E}\{N_{k+1}\}$ volgt $\mathbb{E}\{\delta(N)\} = \mathbb{E}\{X\}$ en uit de formule voor $\mathbb{E}\{N_{k+1}^2\}$ met het bovenstaande:

$$0 = \mathbb{E}\{X^2\} + \mathbb{E}\{X\} + 2\mathbb{E}\{N\} \cdot \mathbb{E}\{X\} - 2\mathbb{E}\{N\} - 2\mathbb{E}\{X^2\}.$$

Hieruit volgt:

$$\mathbb{E}\{N\} = \frac{\mathbb{E}\{X^2\} + \mathbb{E}\{X\} \cdot (1 - 2\mathbb{E}\{X\})}{2(1 - \mathbb{E}\{X\})}. \quad (5.6.1)$$

Zij $N(t)$ het aantal aankomsten in tijdsduur t . Uit de eigenschappen van de exponentiële verdeling is bekend dat $\mathbb{E}\{N(t)\} = \text{var}\{N(t)\} = \lambda t$. De waarden voor $\mathbb{E}\{X\}$ en $\mathbb{E}\{X^2\}$ kunnen als volgt worden berekend:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{X\} &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}(X|T)\} = \int_0^\infty \mathbb{E}\{X|T=t\} f(t) dt = \int_0^\infty \mathbb{E}\{N(t)\} f(t) dt \\ &= \lambda \int_0^\infty t f(t) dt = \lambda \cdot \mathbb{E}\{T\} = \lambda \tau. \\ \mathbb{E}\{X^2\} &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}(X^2|T)\} = \int_0^\infty \mathbb{E}\{X^2|T=t\} f(t) dt = \int_0^\infty \mathbb{E}\{\{N(t)\}^2\} f(t) dt \\ &= \int_0^\infty \left\{ \text{var}\{N(t)\} + \{\mathbb{E}\{N(t)\}\}^2 \right\} f(t) dt = \int_0^\infty \{\lambda t + (\lambda t)^2\} f(t) dt \\ &= \lambda \tau + \lambda^2 \int_0^\infty t^2 f(t) dt = \lambda \tau + \lambda^2(\sigma^2 + \tau^2). \end{aligned}$$

Vullen we deze waarden in (5.6.1) in, dan krijgen we:

$$\mathbb{E}\{N\} = \frac{\lambda \tau + \lambda^2(\sigma^2 + \tau^2) + \lambda \tau(1 - 2\lambda \tau)}{2(1 - \lambda \tau)} = \lambda \tau + \frac{\lambda^2(\sigma^2 + \tau^2)}{2(1 - \lambda \tau)}.$$

Laat $\rho = \lambda \tau$, dan luiden de formules van dit model:

$$L = \rho + \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1 - \rho)}; \quad L_q = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1 - \rho)}; \quad W = \frac{L}{\lambda}; \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

Voor de tijdsduur W_q dat men moet wachten voordat men bediend wordt, volgt uit bovenstaande formule dat

$$W_q = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \left\{ \frac{\tau}{2} + \frac{\sigma^2}{2\tau} \right\}$$

Dit is de zogenaamde formule van *Pollaczek-Khintchine*. We kunnen deze formule ook intuïtief afleiden met een 'betaalregel', zoals we ook hebben gedaan bij de formule van Little.

Laat de *werklast* van een systeem de som zijn van de verwachtingen van de (resterende) bedieningsduren in het systeem dat zich in een stationaire situatie bevindt. Volgens de PASTA-regel moet een aankomende klant wachten voordat hij bediend wordt gedurende een tijdsduur gelijk aan de werklast van het systeem: $\text{werklast} = W_q$.

Beschouw nu de volgende betaalregel: iedere klant betaalt met een 'snelheid' (d.w.z. bedrag per tijdseenheid) gelijk aan zijn (resterende) bedieningsduur. Zolang een klant niet bediend wordt, gemiddeld dus gedurende W_q tijdseenheden, betaalt hij met een snelheid T en als hij reeds x tijdseenheden in bediening is betaalt hij met snelheid $T - x$. De verwachte betaling van een klant is dus:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ TW_q + \int_0^T (T - x) dx \right\} &= \tau W_q + \frac{1}{2} \mathbb{E}\{T^2\} = \tau W_q + \frac{1}{2} \left\{ \text{var}\{T\} + \mathbb{E}\{T\}^2 \right\} \\ &= \tau W_q + \frac{1}{2} (\sigma^2 + \tau^2). \end{aligned}$$

Omdat er per tijdseenheid λ klanten het systeem binnenkomen ontvangt het systeem dus per tijdseenheid (laat de klanten aan de poort betalen en gebruik dat $\lambda\tau = \rho$): $\rho \left\{ W_q + \frac{\sigma^2}{2\tau} + \frac{\tau}{2} \right\}$.

Anderzijds ontvangt het systeem per tijdseenheid de werklast, d.w.z. W_q , zodat geldt:

$$W_q = \rho \left\{ W_q + \frac{\sigma^2}{2\tau} + \frac{\tau}{2} \right\} \rightarrow W_q = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \left\{ \frac{\sigma^2}{2\tau} + \frac{\tau}{2} \right\}.$$

We zullen twee speciale gevallen van dit model verder uitwerken.

a. Constante bedieningsduur

Veronderstel dat de bedieningsduur een constante waarde τ heeft. Dan is $\sigma = 0$, wat het volgende oplevert:

$$W_q = \frac{\rho\tau}{2(1-\rho)}; \quad L_q = \lambda W_q; \quad L = L_q + \rho; \quad W = \frac{L}{\lambda}.$$

b. Erlang-verdelingen

In model a is $\sigma = 0$ en in het $M/M/1$ -model is de $\sigma = \frac{1}{\mu}$, wat vaak vrij groot is. Hier tussenin zitten de Erlang-verdelingen met parameters (μ, k) , $k = 1, 2, \dots$. Dit zijn verdelingen behorende bij tijdsduur $T = T_1 + T_2 + \dots + T_k$, waarbij $T_1, T_2, \dots, T_k$ onderling onafhankelijke identiek verdeelde stochastische variabelen zijn, die elk een negatief exponentiële verdeling met parameter μ hebben.

Met behulp van deze interpretatie zijn de verwachting en de variantie eenvoudig te bepalen:

$$\mathbb{E}\{T\} = \sum_{i=1}^k \mathbb{E}\{T_i\} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\mu} = \frac{k}{\mu}; \quad \text{var}\{T\} = \sum_{i=1}^k \text{var}\{T_i\} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\mu^2} = \frac{k}{\mu^2}.$$

We hebben al eerder opgemerkt dat de dichtheid van een Erlang-verdeling met parameter (μ, k) gelijk is aan:

$$f(x) = \mu \cdot e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^{k-1}}{(k-1)!}, \quad x \geq 0.$$

Voor $k = 1$ is $f(x) = \mu e^{-\mu x}$, de dichtheid van de exponentiële verdeling, en voor $k \rightarrow \infty$ gaat $f(x)$ naar de gedegeneerde verdeling van model a met $\tau = \mu^{-1}$.

Het bovenstaande levert de volgende formules op voor de vier karakteristieke grootheden:

$$W_q = \frac{1}{2}k(k+1) \cdot \frac{\lambda}{\mu(\mu - k\lambda)}; \quad L_q = \lambda W_q; \quad L = L_q + \frac{k\lambda}{\mu}; \quad W = \frac{L}{\lambda}.$$

We kunnen ook de stationaire kansen van de Erlang-verdelingen bepalen. Daartoe nemen we niet het aantal klanten in het systeem als toestand, maar het aantal fasen, d.w.z. aantal negatief exponentiële verdeling dat nog bediening moet krijgen. We hebben dan overgangen van toestand i naar $i + k$ met snelheid λ (aankomst) en naar toestand $i - 1$ met snelheid μ (afhandeling van een fase). De bijbehorende balansvergelijkingen zijn:

$$\begin{aligned} \lambda P_0 &= \mu P_1 \\ \lambda P_n + \mu P_n &= \mu P_{n+1} & n = 1, 2, \dots, k-1 \\ \lambda P_n + \mu P_n &= \lambda P_{n-k} + \mu P_{n+1} & n \geq k \end{aligned}$$

Door $P_n = 0$ te nemen als $n < 0$, kunnen we de laatste twee vergelijkingen samenvoegen tot

$$\lambda P_n + \mu P_n = \lambda P_{n-k} + \mu P_{n+1}, \quad n \geq 1. \quad (5.6.2)$$

We zullen dit stelsel oplossen m.b.v. de genererende functie, d.w.z. de functie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n$. Deze is goed gedefinieerd als $|z| < 1$. Vermenigvuldigen we (5.6.2) met z^n en sommeren we deze over alle $n \geq 1$, dan krijgen we:

$$(\lambda + \mu) \sum_{n=1}^{\infty} P_n z^n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-k} z^n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+1} z^n,$$

ofwel

$$(\lambda + \mu)\{f(z) - P_0\} = \lambda z^k f(z) + \mu z^{-1}\{f(z) - P_0 - P_1 z\},$$

waaruit volgt $f(z) = \frac{(\lambda + \mu)P_0 - \mu z^{-1}P_0 - \mu P_1}{\lambda + \mu - \lambda z^k - \mu z^{-1}}$. Door de eerste balansvergelijking $\lambda P_0 = \mu P_1$ in te vullen en teller en noemer met $-z$ te vermenigvuldigen krijgen we:

$$f(z) = \frac{\mu P_0(1 - z)}{\mu(1 - z) - \lambda z(1 - z^k)}. \quad (5.6.3)$$

Verder is $1 - z^k = (1 - z)(1 + z + \dots + z^{k-1})$ en $P_0 = 1 - \rho$ met $\rho = \lambda \cdot \frac{k}{\mu} < 1$ de bezettingsgraad. Vullen we dit in (5.6.3) in, dan krijgen we

$$f(z) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho \cdot \frac{z + z^2 + \dots + z^k}{k}}. \quad (5.6.4)$$

De noemer van (5.6.4) is een polynoom van de graad k met k (complexe) nulpunten z_i , $1 \leq i \leq k$, zodat de noemer te schrijven is als $(1 - \frac{z}{z_1})(1 - \frac{z}{z_2}) \cdots (1 - \frac{z}{z_k})$. Deze nulpunten zijn verschillend (zie Vraag 5.7) en ook geldt $|z_i| > 1$ voor alle i , immers:

$$1 - \rho \cdot \frac{z_i + z_i^2 + \cdots + z_i^k}{k} = 0 \Rightarrow \frac{|z_i + z_i^2 + \cdots + z_i^k|}{k} = \frac{1}{\rho} > 1. \text{ Hieruit volgt, dat } \frac{|z_i + z_i^2 + \cdots + z_i^k|}{k} \leq 1, \text{ als } |z_i| \leq 1.$$

Als $|z| \leq 1$, dan is $f(z)$ is dus te schrijven als (zie ook Vraag 5.7)

$$f(z) = \frac{1 - \rho}{(1 - \frac{z}{z_1})(1 - \frac{z}{z_2}) \cdots (1 - \frac{z}{z_k})} = (1 - \rho) \left\{ \frac{A_1}{1 - z/z_1} + \frac{A_2}{1 - z/z_2} + \cdots + \frac{A_k}{1 - z/z_k} \right\}, \quad (5.6.5)$$

met $A_i = \left\{ \prod_{j \neq i} (1 - z_i/z_j) \right\}^{-1}$, $i = 1, 2, \dots, k$. Hieruit volgt

$$f(z) = (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^k A_i \left(\frac{1}{z_i} \right)^n \right\} z^n, \quad (5.6.6)$$

zodat $P_n = (1 - \rho) \sum_{i=1}^k A_i \left(\frac{1}{z_i} \right)^n$. Voor de kans Q_m op $m \geq 1$ klanten in het systeem geldt:

$$\begin{aligned} Q_m &= \sum_{n=(m-1)k+1}^{mk} P_n = (1 - \rho) \sum_{n=(m-1)k+1}^{mk} \sum_{i=1}^k A_i \left(\frac{1}{z_i} \right)^n \\ &= (1 - \rho) \sum_{i=1}^k A_i \sum_{n=(m-1)k+1}^{mk} \left(\frac{1}{z_i} \right)^n \\ &= (1 - \rho) \sum_{i=1}^k A_i \left(\frac{1}{z_i} \right)^{mk+1} \{ z_i^k + z_i^{k-1} + \cdots + z_i \} = \frac{k}{\rho} (1 - \rho) \sum_{i=1}^k A_i \left(\frac{1}{z_i} \right)^{mk+1}. \end{aligned}$$

Voorbeeld 5.4

Beschouw een Erlang verdeling met $k = 2$, $\lambda = 1$ en $\mu = 6$. Dan is $\rho = \lambda \cdot \frac{k}{\mu} = \frac{1}{3}$ en

$$f(z) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho \cdot \frac{z + z^2 + \cdots + z^k}{k}} = \frac{2/3}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{z + z^2}{2}} = \frac{2/3}{(1 - z/2)(1 + z/3)}.$$

Hieruit volgt: $z_1 = 2$, $z_2 = -3$; $A_1 = (1 - \frac{z_1}{z_2})^{-1} = \frac{3}{5}$, $A_2 = (1 - \frac{z_2}{z_1})^{-1} = \frac{2}{5}$. Dit geeft:

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{2}{3} \left\{ \frac{3}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{2}{5} \left(\frac{-1}{3} \right)^n \right\} = \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{4}{15} \left(\frac{-1}{3} \right)^n. \\ Q_m &= \frac{2}{1/3} \cdot \frac{2}{3} \left\{ \frac{3}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^{2m+1} + \frac{2}{5} \left(\frac{-1}{3} \right)^{2m+1} \right\} = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{4} \right)^m - \frac{8}{15} \left(\frac{1}{9} \right)^m. \end{aligned}$$

Vraag 5.7

- Toon aan dat alle nulpunten van de noemer van (5.6.4) enkelvoudig zijn.
- Toon aan dat formule (5.6.5) juist is.

5.7 Netwerken van wachtrijen

5.7.1 De tandem wachtrij

Beschouw een systeem met twee bedienden. Klanten komen aan bij de eerste wachtrij, met bediende 1, volgens een Poisson proces met parameter λ . Na hier bediend te zijn gaan ze door naar

een tweede wachtrij, waar bediende 2 werkzaam is. De bedieningsduur bij bediende i is negatief exponentieel verdeeld met parameter μ_i , $i = 1, 2$. We veronderstellen dat de wachtruimtes onbegrensd zijn en dat $\rho_i = \frac{\lambda}{\mu_i} < 1$, $i = 1, 2$.

Definieer $N_i(t)$ als het aantal klanten dat op tijdstip t aanwezig is bij wachtrij i , $i = 1, 2$. Dan is het proces $\{(N_1(t), N_2(t)), t \geq 0\}$ een continue Markov keten. De evenwichtsverdeling (op grond van de aanname $\rho_i < 1$, $i = 1, 2$ kan worden aangetoond dat deze bestaat en gevonden kan worden als unieke oplossing van het stelsel lineaire vergelijkingen (5.7.1)) van deze Markov keten noteren we met $P_{n,m}$, $n, m \in \mathbb{N}_0$. $P_{n,m}$ heeft weer de interpretatie als de fractie van de tijd dat op de lange duur gelijktijdig n klanten in wachtrij 1 en m klanten in wachtrij 2 zijn.

We zullen nu eerst bewijzen dat het vertrekproces van wachtrij 1 weer een Poissonproces is met parameter λ . Dat volgt heel gemakkelijk uit de reversibiliteit van geboorte-sterfte processen. Immers, de eerste wachtrij is een M/M/1-rij, dus een reversibel proces.

Laat nu $t > 0$ gegeven zijn (en neem aan dat het proces al oneindig lang ‘loopt’). Het aankomstproces na tijdstip t is een Poissonproces met parameter λ dat onafhankelijk is van de toestand op tijdstip t , $N_1(t)$. Het omgekeerde proces is ook een M/M/1-rij met dezelfde parameters, dus de toestand op tijdstip t is onafhankelijk van het aankomstproces na tijdstip t , hetgeen eveneens een Poissonproces is met parameter λ . Het aankomstproces na tijdstip t in het omgekeerde proces, is het vertrekproces voor tijdstip t in het oorspronkelijke proces.

We concluderen dat het vertrekproces voor tijdstip t een Poissonproces is met parameter λ , dat onafhankelijk is van $N_1(t)$.⁵

Het vertrekproces voor tijdstip t uit wachtrij 1, is het aankomstproces voor tijdstip t in de tweede wachtrij. Omdat $N_2(t)$ volledig wordt bepaald door het aankomstproces in de tweede wachtrij voor t , en de bedieningsduren voor tijdstip t , geldt dat $N_2(t)$ en $N_1(t)$ onafhankelijk zijn. Verder is dus ook de tweede wachtrij een M/M/1-rij. We concluderen dat

$$P_{n,m} = (1 - \rho_1)\rho_1^n(1 - \rho_2)\rho_2^m, \quad n, m \in \mathbb{N}_0. \quad (5.7.1)$$

We kunnen dit resultaat ook afleiden door de expressie hierboven in hieronder staande evenwichtsvergelijkingen in te vullen.

Toestand	Stroom in = Stroom uit
$0, 0$	$\mu_2 P_{0,1} = \lambda P_{0,0}$
$n, 0; n \geq 1$	$\lambda P_{n-1,0} + \mu_2 P_{n,1} = (\lambda + \mu_1) P_{n,0}$
$0, m; m \geq 1$	$\mu_2 P_{0,m+1} + \mu_1 P_{1,m-1} = (\lambda + \mu_2) P_{0,m}$
$n, m; n, m \geq 1$	$\lambda P_{n-1,m} + \mu_2 P_{n,m+1} + \mu_1 P_{n+1,m-1} = (\lambda + \mu_1 + \mu_2) P_{n,m}$

Met behulp van de stationaire kansen zijn de karakteristieke grootheden L en W weer uit te rekenen:

⁵Burke heeft zelfs bewezen dat het vertrekproces van een M/M/s-wachtrij weer een Poisson proces met parameter λ is (P.J. Burke: *Output processes and tandem queues*, Proceedings of the symposium on computer-communications network and teletraffic, New York, Polytechnic Institute of Brooklyn Press (1972) 419–428).

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{n,m=0}^{\infty} (n+m) P_{n,m} = (1-\rho_1)(1-\rho_2) \left\{ \sum_{n,m=0}^{\infty} n \rho_1^n \rho_2^m + \sum_{n,m=0}^{\infty} m \rho_1^n \rho_2^m \right\} = \\
&= (1-\rho_1)(1-\rho_2) \left\{ \rho_1 \sum_{m=0}^{\infty} \rho_2^m \sum_{n=1}^{\infty} n \rho_1^{n-1} + \rho_2 \sum_{n=0}^{\infty} \rho_1^n \sum_{m=1}^{\infty} m \rho_2^{m-1} \right\} \\
&= (1-\rho_1)(1-\rho_2) \left\{ \rho_1(1-\rho_2)^{-1}(1-\rho_1)^{-2} + \rho_2(1-\rho_1)^{-1}(1-\rho_2)^{-2} \right\} \\
&= \frac{\rho_1}{1-\rho_1} + \frac{\rho_2}{1-\rho_2} = \frac{\lambda}{\mu_1-\lambda} + \frac{\lambda}{\mu_2-\lambda}. \\
W &= \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu_1-\lambda} + \frac{1}{\mu_2-\lambda}.
\end{aligned}$$

Opmerking

Als we een tandem wachtrij hebben met s_1 bedienden bij wachtrij 1 en s_2 bedienden bij wachtrij 2, waarbij verondersteld wordt dat $\frac{\lambda}{s_1\mu_1} < 1$ en $\frac{\lambda}{s_2\mu_2} < 1$, dan geldt ook dat de wachtrijen zich in de evenwichtssituatie gedragen als onafhankelijke $M/M/s_1$ - resp. $M/M/s_2$ -wachtrijen.

Voorbeeld 5.5

Op een vliegveld moeten passagiers eerst een veiligheidscontrole ondergaan en vervolgens een bagagecontrole. De tijden die per passagier vereist zijn voor de veiligheidscontrole en de bagagecontrole zijn onafhankelijke stochastische variabelen die exponentieel verdeeld zijn met verwachtingswaarde van resp. 1 en 2 minuten. De passagiers komen aan volgens een Poisson proces met een gemiddelde van 75 passagiers per uur. In totaal zijn er 10 beamtten beschikbaar om verdeeld te worden over de veiligheidscontrole en de bagagecontrole. Voor welke opsplitsing van deze beamtten is het gemiddeld aantal klanten dat zich in het controleproces bevindt minimaal? Kies als tijdseenheid een uur, dan is $\lambda = 75$, $\mu_1 = 60$ en $\mu_2 = 30$. Als we k beamtten toekennen aan de veiligheidscontrole en $10 - k$ aan de bagagecontrole, dan moet voor het bereiken van een evenwichtssituatie gelden dat

$$\frac{\lambda}{k\mu_1} = \frac{75}{60k} < 1, \text{ d.w.z. } k \geq 2 \text{ en } \frac{\lambda}{(10-k)\mu_2} = \frac{75}{30(10-k)} < 1, \text{ d.w.z. } 10 - k \geq 3, \text{ ofwel } k \leq 7.$$

Voor k kunnen we dus de waarden 2, 3, 4, 5, 6 en 7 kiezen. Voor ieder van deze k 's kunnen we in beide wachtrijen volgens de formules uit het $M/M/s$ -model (zie (5.5.4) en (5.5.5)) de L_1 (aantal personen bij de veiligheidscontrole) en L_2 (aantal personen bij de bagagecontrole) en dus ook het totaal aantal personen in het controleproces ($L_1 + L_2$) berekenen:

k	L_1	L_2	$L_1 + L_2$
2	2.0513	2.5020	4.5533
3	1.3605	2.5086	3.8691
4	1.2692	2.5339	3.8031
5	1.2532	2.6304	3.8836
6	1.2505	3.0331	4.2836
7	1.2500	6.0111	7.2611

We zien dat $L_1 + L_2$ minimaal is voor $k = 4$. Er zijn dan gemiddeld ongeveer 3.8 klanten in controle.

5.7.2 Open netwerk van wachtrijen (Jackson netwerken)

De analyse van de tandem wachtrij kan aanmerkelijk worden gegeneraliseerd.⁶ Beschouw een systeem met K bedienden die ieder een wachtrij beheren. Klanten komen het systeem binnen en kunnen direct naar wachtrij i gaan volgens een Poisson proces met parameter r_i , $i = 1, 2, \dots, K$. Voor de aankomstsnelheid λ bij het totale systeem geldt: $\lambda = \sum_{i=1}^K r_i$. Na bediend te zijn bij wachtrij i volgens een exponentieel verdeelde bedieningsduur met snelheid μ_i , gaat een klant naar wachtrij j met kans p_{ij} , $1 \leq j \leq K$, of hij verlaat het systeem met kans $p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^K p_{ij}$ voor $i = 1, 2, \dots, K$.

Zij λ_i de gemiddelde totale aankomstsnelheid bij wachtrij i , $i = 1, 2, \dots, K$. Vanwege het principe dat in de evenwichtssituatie 'stroom in = stroom uit', is de vertreksnelheid bij wachtrij i ook λ_i . Met kans p_{ij} wordt vervolgens gegaan naar wachtrij j .

Beschouw de toestandruimte $\{0, 1, 2, \dots, K\}$, waarbij toestand 0 'de buitenwereld' is. We nemen aan dat de toestanden $1, 2, \dots, K$ *transient* zijn, d.w.z. dat een klant het systeem met kans 1 uiteindelijk verlaat. Neem $p_{00} = 1$, dan is dus toestand 0, de enige recurrente toestand, *absorberend*. Uit de theorie van Markov ketens volgt dan dat de getallen λ_j , $1 \leq j \leq K$ kunnen dan worden verkregen als unieke oplossing van het stelsel

$$\lambda_j = r_j + \sum_{i=1}^K \lambda_i p_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, K. \quad (5.7.2)$$

Laat $\rho_j = \frac{\lambda_j}{\mu_j}$, $j = 1, 2, \dots, K$. Om een evenwichtssituatie te bereiken is het nodig dat $\rho_j < 1$ voor $j = 1, 2, \dots, K$. Er kan worden aangetoond dat in dat geval

$$\mathbb{P}\{n \text{ klanten in wachtrij } j\} = (1 - \rho_j) \rho_j^n, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (5.7.3)$$

en, weer via de balansvergelijkingen, dat $\mathbb{P}(n_1, n_2, \dots, n_K)$, d.w.z. de kans dat er n_j klanten zijn bij wachtrij j , $1 \leq j \leq K$, de *productvorm* heeft:

$$\mathbb{P}(n_1, n_2, \dots, n_K) = \prod_{j=1}^K (1 - \rho_j) \rho_j^{n_j}, \quad n_j \in \mathbb{N}_0, 1 \leq j \leq K. \quad (5.7.4)$$

Formule (5.7.3) is opmerkelijk omdat het aankomstproces bij wachtrij j geen Poisson proces hoeft te zijn. We kunnen dit inzien aan de hand van het volgende voorbeeld.

Laat $K = 1$, $p_{11} = 0.9$, $r_1 = 1$ en $\mu_1 = 100$. Uit (5.7.2) volgt dat $\lambda_1 = 10$, zodat $\rho_1 = 0.1$. Gemiddeld $\frac{1}{\mu_1} = 0.01$ tijdseenheden na een aankomst is een bediening klaar, waarna de klant met kans van 0.9 weer arriveert bij deze wachtrij. De gemiddelde aankomstsnelheid bij het systeem is één aankomst per tijdseenheid. Dus kort na een aankomst is er een grote kans om in korte tijd weer een aankomst te hebben, terwijl op een willekeurig tijdstip er slechts een vrij kleine kans is

⁶Dit is gedaan door Jackson, zie: J.R. Jackson: *Networks of waiting lines*, Operations Research 5 (1957) 518–521 en J.R. Jackson: *Jobson-like queueing systems*, Management Science 10 (1963) 131–142.

op een aankomst. Het aankomstproces heeft dus geen onafhankelijke tussentijden en is dus niet Poisson.

We zullen laten zien dat (5.7.4) voldoet aan de balansvergelijkingen voor dit model. Daartoe noteren we de vector $(n_1, n_2, \dots, n_K)$ met n en de vector $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ met e_i als de 1 op plaats i staat. Verder is $P(n) = \mathbb{P}(n_1, n_2, \dots, n_K)$, waarbij we afspreken dat $P(n) = 0$ als minstens één $n_i < 0$.

Als we toestand n beschouwen, dan kunnen we uit deze toestand vertrekken door aankomsten van buitenaf of doordat een van de bedieningen afloopt. Dit geeft in de balansvergelijkingen de

bijdrage $\{\sum_{i=1}^K r_i + \sum_{i=1}^K \mu_i \delta(n_i)\}P(n)$, waarbij $\delta(n_i) = \begin{cases} 0 & \text{als } n_i = 0; \\ 1 & \text{als } n_i \geq 1. \end{cases}$ Merk op dat

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^K r_i &= \sum_{i=1}^K \{\lambda_i - \sum_{j=1}^K \lambda_j p_{ji}\} = \sum_{i=1}^K \lambda_i - \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \lambda_j p_{ji} \\ &= \sum_{i=1}^K \lambda_i - \sum_{j=1}^K \lambda_j (1 - p_{j0}) = \sum_{i=1}^K \lambda_i p_{i0}. \end{aligned}$$

We kunnen van een andere toestand toestand n bereiken door:

- (1) aankomsten van buiten via toestanden $n - e_i$, $1 \leq i \leq K$: dit geeft bijdrage $\sum_{i=1}^K r_i P(n - e_i)$, ofwel $\sum_{i=1}^K \{\lambda_i - \sum_{j=1}^K \lambda_j p_{ji}\} P(n - e_i) = \sum_{i=1}^K \lambda_i P(n - e_i) - \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \lambda_j p_{ji} P(n - e_i)$.
- (2) vertrek van een klant (via toestanden $n + e_i$, $1 \leq i \leq K$) in een der wachtrijen die daarna het systeem verlaat: dit geeft bijdrage $\sum_{i=1}^K \mu_i p_{i0} P(n + e_i)$.
- (3) vertrek van een klant in wachtrij j die daarna naar wachtrij i gaat (dus overgang vanuit toestand $n + e_j - e_i$, $1 \leq i, j \leq K$): dit geeft bijdrage $\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \mu_j p_{ji} P(n + e_j - e_i)$.

Hieruit volgen de balansvergelijkingen:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^K \lambda_i p_{i0} P(n) + \sum_{i=1}^K \mu_i \delta(n_i) P(n) &= \sum_{i=1}^K \lambda_i P(n - e_i) - \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \lambda_j p_{ji} P(n - e_i) + \\ &\sum_{i=1}^K \mu_i p_{i0} P(n + e_i) + \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \mu_j p_{ji} P(n + e_j - e_i). \end{aligned}$$

Vervolgens merken we op dat de formule $P(n) = \prod_{j=1}^K (1 - \rho_j) \rho_j^{n_j}$ voldoet aan:

- (1) $\lambda_i P(n - e_i) = \mu_i \delta(n_i) P(n)$ voor alle i en n .
- (2) $\lambda_j P(n - e_i) = \mu_j P(n + e_j - e_i)$ voor alle i, j en n .
- (3) $\lambda_i P(n) = \mu_i P(n + e_i)$ voor alle i en n .

Hieruit volgt direct dat aan de balansvergelijkingen is voldaan.

Voor L , het gemiddeld aantal klanten in het systeem, geldt:

$$L = \sum_{j=1}^K \{\text{het gemiddeld aantal klanten bij wachtrij } j\} = \sum_{j=1}^K \frac{\lambda_j}{\mu_j - \lambda_j}. \quad (5.7.5)$$

Met behulp van de formule van Little vinden we (de gemiddelde aankomstnelheid λ van het

systeem voldoet aan $\lambda = \sum_{j=1}^K r_j$):

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\sum_{j=1}^K \frac{\lambda_j}{\mu_j - \lambda_j}}{\sum_{j=1}^K r_j}. \quad (5.7.6)$$

Voorbeeld 5.6

Beschouw een systeem met twee wachtrijen, waar klanten van buiten aankomen volgens Poisson processen: bij wachtrij 1 met een snelheid van 4 en bij wachtrij 2 met een snelheid van 5. De bedieningsduren zijn exponentieel verdeeld met snelheden 8 in wachtrij 1 en 10 in wachtrij 2. Een klant die bij wachtrij 1 is bediend gaat met kans 0.5 naar wachtrij 2 en verlaat het systeem ook met kans 0.5; een klant die bij wachtrij 2 is bediend gaat met kans 0.25 naar wachtrij 1 en verlaat het systeem met kans 0.75. Bereken de stationaire kansen en de grootheden L en W .

Het stelsel (5.7.2) is: $\begin{cases} \lambda_1 = 4 + \frac{1}{4}\lambda_2 \\ \lambda_2 = 5 + \frac{1}{2}\lambda_1 \end{cases}$ waaruit volgt dat $\lambda_1 = 6$ en $\lambda_2 = 8$, zodat $\rho_1 = \frac{3}{4}$ en

$\rho_2 = \frac{4}{5}$. Dit geeft volgens (5.7.4), (5.7.5) en (5.7.6):

$$\mathbb{P}(n, m) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^m, \quad n, m \in \mathbb{N}_0; \quad L = \frac{6}{8-6} + \frac{8}{10-8} = 7; \quad W = \frac{L}{r_1+r_2} = \frac{7}{4+5} = \frac{7}{9}.$$

Opmerking

De productvorm (5.7.4) is gevonden onder de veronderstelling dat alle bedieningstijden exponentieel zijn. Tevens is verondersteld dat elke wachtrij slechts één bediende heeft. Deze productvorm geldt ook⁷ in een van de volgende gevallen:

1. Iedere wachtrij heeft een willekeurig aantal bedienden. In dit geval moet in (5.7.4) aan de rechterzijde het product staan van de kansen zoals die uit het $M/M/s$ model volgen.
2. Elke klant treft altijd direct een bediende (te modelleren alsof er oneindig veel bedienden zijn), in welk geval de bedieningsduren een willekeurige verdeling mogen hebben. Nu moet in (5.7.4) aan de rechterzijde het product staan van de kansen van Poissonverdelingen met verwachtingswaarde $\lambda_j \mathbb{E}(S_j)$, waarbij $\mathbb{E}(S_j)$ de verwachtingswaarde is van de bedieningstijd in wachtrij j , $j = 1, 2, \dots, K$.

5.7.3 Gesloten netwerk van wachtrijen

Beschouw een systeem met K wachtrijen, waarin een vast aantal klanten, zeg N , aanwezig is. Elke wachtrij heeft één bediende met een bedieningstijd die exponentieel verdeeld is met parameter μ_i , $i = 1, 2, \dots, K$. Als de bediening van een klant bij wachtrij i klaar is, gaat de klant met kans p_{ij} naar wachtrij j , waarbij $\sum_j p_{ij} = 1$ voor alle i . Verder wordt verondersteld dat iedere wachtrij een oneindige wachtruimte heeft en dat de Markov keten P irreducibel is. Het stochastische proces dat simultaan het aantal aanwezige klanten bij elk van de stations beschrijft, is een continue Markov keten.

⁷F. Baskett, K.M. Chandy, R.R. Muntz and F. Palacios: "Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers", Journal of the ACM **22** pp. 248-260 (1975).

Zij $\mathbb{P}(n_1, n_2, \dots, n_K)$ de kans dat op de lange duur bij wachtrij i n_i klanten aanwezig zijn, waarbij $n_1 + n_2 + \dots + n_K = N$. Ook in dit geval kan worden bewezen dat $\mathbb{P}(n_1, n_2, \dots, n_K)$ de fractie van de tijd is dat er gelijktijdig n_i klanten bij wachtrij i zijn, $i = 1, 2, \dots, K$ en dat deze kansverdeling weer een productvorm heeft. Om deze op te stellen hebben we het volgende nodig.

Laat λ_i = het gemiddeld aantal aankomsten per tijdseenheid op de lange duur zijn bij wachtrij i , $i = 1, 2, \dots, K$. Op grond van het principe 'stroom in = stroom uit' is λ_i ook het gemiddeld aantal vertrekken bij i . De λ_i 's kunnen verkregen worden als oplossing van het lineaire stelsel

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^K \lambda_i p_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, K. \quad (5.7.7)$$

Het stelsel (5.7.7) heeft echter geen unieke oplossing, maar is op een constante na bepaald. We kunnen dus schrijven $\lambda_j = \alpha \pi_j$, $j = 1, 2, \dots, K$, waarbij π de unieke oplossing is van het stelsel

$$\pi_j = \sum_{i=1}^K \pi_i p_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, K \quad (5.7.8)$$

$$\sum_{j=1}^K \pi_j = 1 \quad (5.7.9)$$

Uit de theorie van de Markov ketens weten we dat π de stationaire verdeling is van de Markov keten P . De gezochte productvorm voor de simultane kansverdeling luidt nu:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(n_1, n_2, \dots, n_K) &= C \cdot \prod_{i=1}^K \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i} \right)^{n_i} = C \cdot \alpha^{n_1 + n_2 + \dots + n_K} \prod_{i=1}^K \left(\frac{\pi_i}{\mu_i} \right)^{n_i} \\ &= C \cdot \alpha^N \prod_{i=1}^K \left(\frac{\pi_i}{\mu_i} \right)^{n_i} = C' \cdot \prod_{i=1}^K \left(\frac{\pi_i}{\mu_i} \right)^{n_i}, \end{aligned}$$

waarbij C' een normeringsconstante is. Deze constante is in het algemeen lastig te bepalen. We moeten namelijk sommeren over alle mogelijke combinaties $(n_1, n_2, \dots, n_K)$, waarbij $n_1 + n_2 + \dots + n_K = N$. Het aantal termen is $\binom{N+K-1}{N}$, wat in het algemeen een enorm groot getal is.⁸ Als bijvoorbeeld $K = 10$ en $N = 35$, dan is het aantal termen 52.451.256. Bovendien vereist iedere term de berekening van $K = 10$ constanten, waarmee het aantal bewerkingen meer dan een half miljard wordt!

Er zijn echter goede algoritmen om deze constante efficiënt te berekenen. We bespreken een algoritme van Buzen, dat complexiteit $\mathcal{O}(K \cdot N^2)$ heeft.⁹ De constante die we moeten bepalen is de inverse van $\sum_{\{(n_1, n_2, \dots, n_K) | n_1 + n_2 + \dots + n_K = N\}} \prod_{i=1}^K \left(\frac{\pi_i}{\mu_i} \right)^{n_i}$. We gaan deze recursief berekenen en definiëren daartoe:

$$S(n, k) = \{ \underline{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k) \mid n_1 + n_2 + \dots + n_k = n \}; \quad G(n, k) = \sum_{\underline{n} \in S(n, k)} \prod_{i=1}^k \left(\frac{\pi_i}{\mu_i} \right)^{n_i}.$$

⁸Dit is een K -herhalingscombinatie uit N elementen. In Besliskunde 1 is aangetoond dat dit aantal $\binom{N+K-1}{N}$ is.

⁹J.P. Buzen: *Computational algorithms for closed queueing networks with exponential servers*, Communications of the ACM 16 (1973) 527–531.

Uit deze definities is het direct duidelijk dat we $G(N, K)$ moeten bepalen en dat de randvoorwaarden zijn: $G(0, k) = 1$ voor $k = 1, 2, \dots, K$ en $G(n, 1) = \left(\frac{\pi_1}{\mu_1}\right)^n$ voor $n = 0, 1, \dots, N$. Verder geldt:

$$\begin{aligned} G(n, k) &= \sum_{\underline{n} \in S(n, k)} \prod_{i=1}^k \left(\frac{\pi_i}{\mu_i}\right)^{n_i} = \sum_{j=0}^n \sum_{\{\underline{n} \in S(n, k), n_k=j\}} \prod_{i=1}^k \left(\frac{\pi_i}{\mu_i}\right)^{n_i} \\ &= \sum_{j=0}^n \left(\frac{\pi_k}{\mu_k}\right)^j \sum_{\underline{n} \in S(n-j, k-1)} \prod_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\pi_i}{\mu_i}\right)^{n_i} = \sum_{j=0}^n \left(\frac{\pi_k}{\mu_k}\right)^j G(n-j, k-1). \end{aligned}$$

Dit geeft onderstaand algoritme om C' te bepalen.

Algoritme 5.1 *Algoritme van Buzen voor de bepaling van de constante C'*

1. $G(0, k) = 1$ voor $k = 1, 2, \dots, K$ en $G(n, 1) = \left(\frac{\pi_1}{\mu_1}\right)^n$ voor $n = 1, 2, \dots, N$.
2. Voor $k = 2, 3, \dots, K-1$ doe
 Voor $n = 1, 2, \dots, N$ doe: $G(n, k) = \sum_{j=0}^n \left(\frac{\pi_k}{\mu_k}\right)^j G(n-j, k-1)$.
3. $G(N, K) = \sum_{j=0}^N \left(\frac{\pi_K}{\mu_K}\right)^j G(N-j, K-1)$ en $C' = \{G(N, K)\}^{-1}$.

Uit het algoritme volgt direct dat de complexiteit $\mathcal{O}(K \cdot N^2)$ is (de berekening van $G(n, k)$ in stap 2 is van de orde N).

Soms is het niet nodig om C' expliciet te bepalen, bijvoorbeeld als we alleen het gemiddeld aantal klanten of de gemiddelde wachttijd bij de verschillende wachtrijen willen weten. Dit kan worden gedaan via het zogenaamde *mean-value algoritme*.

Mean-value algoritme

Dit algoritme is gebaseerd op de volgende stelling die we zonder bewijs zullen geven.

Stelling 5.4

In een gesloten netwerk met N klanten geldt in de evenwichtssituatie dat de kans dat een klant die bij een wachtrij aankomt n_i andere klanten ziet bij de wachtrij i , waarbij $n_1 + n_2 + \dots + n_K = N-1$ is gelijk aan $\mathbb{P}(n_1, n_2, \dots, n_K)$.

Dit resultaat zegt dus dat een aankomende klant het systeem ziet in de evenwichtssituatie behorende bij één klant minder in het systeem. Definieer nu voor $n = 1, 2, \dots, N$:

- $L_n(i)$ = het gemiddeld aantal klanten bij wachtrij i als er n klanten in het systeem zijn.
- $W_n(i)$ = gemiddelde tijd die een klant in wachtrij i verblijft als er bij aankomst van de klant n klanten in het systeem zijn.
- $\lambda_n(i)$ = het gemiddeld aantal aankomsten per tijdseenheid bij wachtrij i als er n klanten in het systeem zijn.

Op grond van Stelling 5.4 geldt dat in een netwerk met n klanten een klant die bij wachtrij i aankomt daar gemiddeld $L_{n-1}(i)$ andere klanten aantreft. Vanwege de geheugenloosheid van de exponentiële bedieningsduren geldt voor de gemiddelde tijd dat deze klant bij wachtrij i verblijft:

$$W_n(i) = \frac{L_{n-1}(i) + 1}{\mu_i}, \quad 1 \leq i \leq K.$$

Passen we de formule van Little toe, dan krijgen we voor $L_n(i)$:

$$L_n(i) = \lambda_n(i)W_n(i), \quad 1 \leq i \leq K. \quad (5.7.10)$$

Verder geldt weer

$$\lambda_n(i) = \alpha_n \pi_i, \quad 1 \leq i \leq K, \quad (5.7.11)$$

waarbij π_i bepaald wordt door (5.7.8) en (5.7.9). Omdat $\sum_{i=1}^K L_n(i) = n$, volgt uit (5.7.10) en (5.7.11) dat $n = \alpha_n \sum_{i=1}^K \pi_i W_n(i)$, d.w.z. $\alpha_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^K \pi_i W_n(i)}$. Hiermee zijn $L_N(i)$ en $W_N(i)$, het gemiddeld aantal klanten resp. de gemiddelde verblijftijd bij wachtrij i , $1 \leq i \leq K$, als er N klanten in het systeem zijn, te berekenen met het volgende algoritme.¹⁰

Algoritme 5.2 *Mean-value algoritme*

1. a. Bepaal de stationaire kansen π_i , $1 \leq i \leq K$ van de Markov keten P door het stelsel (5.7.8) en (5.7.9) op te lossen.
- b. Laat $n = 1$.
- c. $W_1(i) = \frac{1}{\mu_i}$ voor $i = 1, 2, \dots, K$.
2. $\alpha_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^K \pi_i W_n(i)}$; $\lambda_n(i) = \alpha_n \cdot \pi_i$, $1 \leq i \leq K$; $L_n(i) = \lambda_n(i)W_n(i)$, $1 \leq i \leq K$.
Als $n = N$: stop;
Anders: ga naar stap 3.
3. a. $n := n + 1$; $W_n(i) = \frac{L_{n-1}(i)+1}{\mu_i}$, $1 \leq i \leq K$.
- b. Ga naar stap 2.

Dit algoritme geeft niet alleen $L_N(i)$ en $W_N(i)$ voor alle i , maar ook de $\lambda_N(i)$, het gemiddeld aantal klanten dat per tijdseenheid door wachtrij i wordt verwerkt, $i = 1, 2, \dots, K$. Tenslotte merken we op dat deze resultaten weer gegeneraliseerd kunnen worden tot de gevallen die aan het einde van het stukje over open netwerken zijn vermeld.

Voorbeeld 5.7

Beschouw een gesloten netwerk met $K = 2$; $N = 3$; $\mu_1 = \mu_2 = \mu$; $p_{11} = \frac{2}{3}$, $p_{12} = \frac{1}{3}$; $p_{21} = \frac{2}{3}$, $p_{22} = \frac{1}{3}$. De stationaire verdeling van de Markov keten volgt uit het stelsel:

¹⁰Deze techniek is afkomstig van Reiser en Lavenberg: M. Reiser and S. S. Lavenberg: *Mean-value analysis of closed multichain queueing networks*, Journal of the ACM 27 (1980) 313–322.

$$\begin{cases} \pi_1 = \pi_1 p_{11} + \pi_2 p_{21} = \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_2 \\ \pi_2 = \pi_1 p_{12} + \pi_2 p_{22} = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 \quad \rightarrow \quad \pi_1 = \frac{2}{3}, \pi_2 = \frac{1}{3}. \text{ Iteratie 1:} \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

$$n = 1; W_1(1) = \frac{1}{\mu}, W_1(2) = \frac{1}{\mu}; \alpha_1 = \mu; \lambda_1(1) = \frac{2}{3}\mu, \lambda_1(2) = \frac{1}{3}\mu; L_1(1) = \frac{2}{3}, L_1(2) = \frac{1}{3}.$$

Iteratie 2:

$$n = 2; W_2(1) = \frac{5}{3\mu}, W_2(2) = \frac{4}{3\mu}; \alpha_2 = \frac{9}{7}\mu; \lambda_2(1) = \frac{6}{7}\mu, \lambda_2(2) = \frac{3}{7}\mu; L_2(1) = \frac{10}{7}, L_2(2) = \frac{4}{7}.$$

Iteratie 3:

$$n = 3; W_3(1) = \frac{17}{7\mu}, W_3(2) = \frac{10}{7\mu}; \alpha_3 = \frac{7}{5}\mu; \lambda_3(1) = \frac{14}{15}\mu, \lambda_3(2) = \frac{7}{15}\mu; L_3(1) = \frac{34}{15}, L_3(2) = \frac{11}{15}.$$

Vraag 5.8

Beschouw een tandemwachtrij met twee stations waarin geen wachtruimtes zijn. Klanten komen bij het eerste station aan volgens een Poissonproces met 10 klanten per uur. Als het station bezet is, dan vertrekt de klant; als het station vrij is, dan wordt de klant bediend volgens een exponentiële bedieningsduur met een verwachte bedieningsduur van 5 minuten. Als een klant klaar is bij het eerste station, dan gaat hij direct naar het tweede station als dit station vrij is. Als het tweede station bezet is, dan blijft de klant in het eerste station wachten totdat de bediening die daar aan de gang is afgelopen is; intussen kunnen er in het eerste station geen nieuwe klanten worden toegelaten. De bedieningsduur in het tweede station is eveneens exponentieel met een verwachting van 5 minuten.

- Bepaal de stationaire kansen m.b.v. de evenwichtsvergelijkingen.
- Wat is de kans dat een aankomende klant het systeem niet binnenkomt?
- Wat is het verwachte aantal klanten in het systeem?
- Wat is de verwachte tijdsduur die een klant in het systeem doorbrengt?

Vraag 5.9

Beschouw een open netwerk met 3 stations. Klanten arriveren van buiten bij de 3 stations volgens Poisson processen met snelheden die resp. 5, 10 en 15 zijn. De bedieningsduren op de 3 stations zijn exponentieel verdeeld met snelheden resp. 10, 50 en 100. Klanten die klaar zijn bij station 1 gaan met dezelfde kans ($\frac{1}{3}$) naar station 2, naar station 3 of verlaten het systeem; klanten die station 2 verlaten gaan naar station 3 en klanten die station 3 verlaten gaan met kans $\frac{1}{2}$ naar station 2 en ook met kans $\frac{1}{2}$ verlaten ze het systeem.

- Wat is het gemiddeld aantal mensen in het systeem (bij alle stations tezamen)?
- Wat is de gemiddelde tijd die een klant in het systeem verblijft?

5.8 Opgaven

Opgave 5.1

- Geef een intuïtieve verklaring met een 'betaalregel' dat het gemiddeld aantal bedienden dat

bezet is gelijk is aan $\lambda \mathbb{E}(B)$, met B de bedieningsduur.

b. Geef een intuïtieve verklaring met een 'betaalregel' dat $\mathbb{E}(N_A) = \lambda \mathbb{E}(T_A)$ (zie (5.3.3)).

Opgave 5.2

In een winkel komen de klanten volgens een Poissonproces bij de kassa aan met een gemiddelde van 30 klanten per uur. Er is één kassa en de bedieningsduur is exponentieel met een gemiddelde van 2 minuten.

Model a: Als er 3 of meer klanten bij de kassa staan wordt de cassière bijgestaan door een inpakster. De bedieningsduur blijft dan exponentieel, maar het gemiddelde zakt tot 1 minuut.

Model b: Als er 3 of meer klanten bij de kassa staan wordt een tweede kassa geopend die ook een negatief exponentiële bedieningsduur heeft met een gemiddelde van 2 minuten.

Stel voor beide modellen de balansvergelijkingen op en bereken L, L_q, W en W_q .

Opgave 5.3

Klanten arriveren bij een bepaalde systeem volgens een Poisson proces met parameter $\lambda = 80$; iedere klant ontvangt van de systeembeheerder 10 euro per uur dat hij in het systeem verblijft. De beheerder van het systeem heeft de keuze uit de volgende twee bedieningsmogelijkheden. De eerste mogelijkheid heeft een bedieningssnelheid van 100 klanten per uur en kost hem 50 euro per uur; de tweede mogelijkheid heeft een bedieningssnelheid van 200 klanten per uur en kost hem 80 euro per uur. Voor welk van deze mogelijkheden zal de systeembeheerder, op basis van kostenvergelijking, kiezen?

Opgave 5.4

Beschouw een $M/M/1$ -wachtrij.

Zij W_q^* de tijd die een willekeurige aankomende klant in de wachtrij verblijft (als het systeem zich in een stationaire situatie bevindt) voordat hij bediening krijgt, dus $\mathbb{E} W_q^* = W_q$.

Toon aan dat $\mathbb{P}\{W_q^* \leq t\} = 1 - \frac{\lambda}{\mu} e^{-(\mu-\lambda)t}$ voor $t \geq 0$.

Opgave 5.5

Een groep van N personen bezoekt een service-station met één bediende op de volgende manier. Als een persoon het service-station heeft verlaten, dan keert hij weer terug na een exponentiële tijdsduur met snelheid λ . De bedieningsduren zijn ook exponentieel verdeeld met snelheid μ .

- Bepaal de toestanden van deze continue Markov keten en stel de balansvergelijkingen op.
- Bepaal, in termen van de stationaire kansen, de gemiddelde snelheid waarmee deze personen het service-station bereiken.
- Bepaal, in termen van de stationaire kansen, de gemiddelde tijd die een persoon bij het service-station verblijft.

Opgave 5.6

Beschouw een $M/M/1$ -wachtrij met de volgende variatie: als een bediening is afgelopen, dan vertrekt de klant met kans α uit het systeem en met kans $1 - \alpha$ sluit hij achteraan aan in de wachtrij voor een volgende bediening.

- Stel de balansvergelijkingen op voor dit model en los ze op (wanneer is er een oplossing?).
- Bepaal de verwachte wachttijd van een klant vanaf het tijdstip dat hij bij de wachtrij aankomt totdat hij voor de eerste keer bediend wordt.
- Wat is de kans dat een klant precies n bedieningen krijgt?
- Wat is de verwachte tijd die een klant aan al zijn bedieningen krijgt?

Opgave 5.7

Beschouw een wachtrijstelsel met één bediende; de bedieningsduur is negatief exponentieel verdeeld met parameter μ . De aankomstsnelheid van de klanten is $\frac{\lambda}{i+1}$ als er i klanten in het systeem zijn. Veronderstel dat we met een geboorte-sterfte proces te maken hebben.

- Stel de balansvergelijkingen op en los deze op.
- Bepaal de gemiddelde aankomstsnelheid $\bar{\lambda}$, L en W als functie van λ en μ .

Opgave 5.8

Bij een pompstation komen auto's aan volgens een Poissonproces met een gemiddelde van één per minuut. Er zijn vier pompen en daarnaast is er nog plaats voor maximaal drie auto's om te wachten tot een pomp vrij komt. De tijd die auto's bij de pomp doorbrengen is negatief exponentieel verdeeld met een gemiddelde van 3 minuten.

- Bepaal de kans dat voor een aankomende auto geen plaats is.
- Bereken L , L_q , W en W_q .

Opgave 5.9

Zij T een Erlang- n verdeling, d.w.z. $T = T_1 + T_2 + \dots + T_n$ met $T_1, T_2, \dots, T_n$ onderling onafhankelijke identiek verdeelde stochastische variabelen die elk negatief exponentieel verdeeld zijn met parameter μ . Toon aan dat de dichtheid T gelijk is aan $\mu e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^{n-1}}{(n-1)!}$.

Opgave 5.10

Vergelijk het $M/M/2$ systeem met bedieningssnelheid μ en het $M/M/1$ systeem met bedieningssnelheid 2μ . Laat het gemiddeld aantal klanten dat wacht $L_q(2)$ resp. $L_q(1)$ zijn en het aantal klanten in het systeem $L(2)$ resp. $L(1)$ zijn.

Toon aan dat in het algemeen geldt: $L_q(2) < L_q(1)$ en $L(2) > L(1)$.

Opgave 5.11

Een bedrijf moet een keuze maken voor een automatiseringsplan. Er zijn twee mogelijkheden: twee vrij krachtige computers of drie minder krachtige. Een krachtige computer doet eenzelfde opdracht in tweederde van de tijd die een minder krachtige er over doet; maar een krachtige computer is anderhalf keer zo duur. Op het eerste gezicht is er dus niet zo veel verschil tussen beide keuzes.

Modelleer het werk dat door de computers moet worden uitgevoerd als $M/M/s$ wachtrij, met de computers als bedienden.

Wat valt er te zeggen over de twee alternatieven als vooral gelet wordt op het werk dat op behandeling moet wachten?

Opgave 5.12

Beschouw een wachttijdsysteem van het type $M/G/1$ met $\lambda = 8$ en $\tau = 1/10$.

Bepaal de vier grootheden L , L_q , W en W_q voor de volgende drie gevallen van de bedieningsduur:

- negatief exponentiële verdeling;
- constante bedieningsduur;
- Erlang bedieningsduur met $k = 4$.

Opgave 5.13

Beschouw een productiesysteem met vier machines. Elk van de machines opereert als een één-bediende systeem. Nieuwe opdrachten van buiten komen aan bij machine 1 volgens een Poisson proces met een gemiddelde van één opdracht per twee minuten. Als de bewerking van een opdracht bij machine 1 klaar is, dan gaat de opdracht voor een volgende bewerking met kans $\frac{1}{2}$ naar machine 2 en met kans $\frac{1}{2}$ naar machine 3. Na de bewerking op machine 2 of 3 volgt een eindbewerking op machine 4, waarna de opdracht klaar is en het systeem verlaat. De bewerkingstijden op de verschillende machines zijn onafhankelijk van elkaar en exponentieel verdeeld met respectievelijk verwachtingswaarden van 48 seconden op machine 1, 144 seconden op machine 2, 180 seconden op machine 3 en 72 seconden op machine 4.

- Bepaal de bezettingsgraad van elk van de machines.
- Bepaal de evenichtsverdeling van de aantallen opdrachten bij de verschillende machines.
- Bepaal de gemiddelde doorlooptijd van een nieuwe opdracht.

Opgave 5.14

Beschouw een systeem met drie stations, waar klanten van buiten aankomen bij station 1 aankomen volgens een Poisson proces met parameter $r_1 = 4$. Alle bedieningsduren zijn exponentieel verdeeld. Bij het eerste station zijn twee bedienden, elk met snelheid van 3; bij de stations 2 en 3 is één bediende met snelheid 2 resp. 6. Een klant die station 1 verlaat gaat met kans $\frac{1}{3}$ naar station 2 en met kans $\frac{2}{3}$ naar station 3; een klant die station 2 verlaat gaat naar station 3 met kans 1; klanten die station 3 verlaten, verlaten ook het systeem. Bereken de stationaire kansen.

Opgave 5.15

Beschouw een gesloten netwerk met twee klanten die zich tussen twee bedienden bewegen. De bedieningstijd van een klant bij station i is exponentieel verdeeld met parameter μ_i voor $i = 1, 2$. Als een klant bediend is een station, dan gaat de klant met kans $\frac{1}{2}$ naar het andere station en met kans $\frac{1}{2}$ voegt de klant zich bij het huidige station voor een nieuwe bediening.

- Specificeer de simultane kansverdeling van de aantallen klanten bij elk bedieningsstation.
- Wat is de fractie van de tijd dat bedieningsstation i bezet is voor $i = 1, 2$?
- Wat is de kans dat een klant aankomend bij bedieningsstation i het station bezet aantreft, $i = 1, 2$?

Opgave 5.16

Beschouw een CPU-disk model met één centrale processor en twee disks. De processor is de centrale rekeneenheid en de disks dienen als achtergrondgeheugen. Het gesloten systeem bevat drie jobs die afwisselend de centrale computer en één van de twee disks bezoeken. Neem aan dat na afloop van een bediening bij de processor een job met kans $\frac{1}{3}$ naar disk 1 gaat en met kans $\frac{2}{3}$ naar disk 2. De werktijden in de verschillende stations zijn onafhankelijk van elkaar en hebben een exponentiële kansverdeling met een respectievelijke verwachtingswaarde van 5 microseconde voor de centrale processor en 15 microseconde voor elk van de twee disks.

- Bepaal de normeringsconstante in de simultane kansverdeling van de aantallen jobs bij de drie stations op directe wijze en met het algoritme van Buzen.
- Wat is het gemiddeld aantal jobs in elk van de stations?

Opgave 5.17 Op de Franse snelwegen moet zoals bekend tol betaald worden. Bij Bordeaux veroorzaakt het tolbetalingspunt grote problemen: tijdens spitsuur zijn de rijen voor de tolpoorten zo lang dat de afrit van de snelweg verstopt raakt. Op dit moment zijn er 10 tolpoorten. Het aankomstproces bij de tol gedurende spitsuur is een Poissonproces met 13 aankomsten per minuut. De gemiddelde tijd om een kaartje te betalen is 45 seconden, met een hoge variantie van 20 seconden. Voor het gemak nemen we aan dat aankomende auto's bij aankomst een willekeurige tolpoortrij kiezen, en dat het spitsuur zo lang is dat er een stationaire situatie is ontstaan.

- Wat is het aankomstproces bij elke tolpoort? Bereken de fractie van de tijd dat een employee in een tolpoort niets te doen heeft. Hoe groot is de kans dat er een tolpoort is waar een aankomende chauffeur zijn betaling onmiddellijk zou kunnen verrichten.
- Bereken de verwachte rijlengte, en de verwachte wachttijd per tolpoort.

De tolorganisatie denkt dat het probleem kan worden opgelost door in een aantal poorten de employees te vervangen door een automatisch betalingssysteem met pasjes. Zo'n pasje hoeft slechts gescand te worden, en dat kost een deterministische tijdsduur van 10 seconden. Onderzoek wijst uit dat 20 procent van de klanten geïnteresseerd is om zo'n pasje aan te schaffen.

- c) Stel dat één tolpoort geautomatiseerd is en dat alle klanten met een pasje ook naar die poort gaan. Stel dat inderdaad 20% van de klanten een betalingspasje hebben aangeschaft. Neem aan dat de betalingsduurverdeling bij de overige tolpoorten niet verandert. Bereken de gemiddelde rijlengte en gemiddelde wachttijd voor de geautomatiseerde poort.
- d) Is de maximale van de verwachte twee rijlengtes in dit nieuwe systeem een verbetering t.o.v. de oude situatie?

Hoofdstuk 6

SIMULATIE

6.1 Inleiding

Vele problemen in de besliskunde zijn te gecompliceerd voor een exacte mathematische analyse. We kunnen dan het model vereenvoudigen zodat een wiskundige oplossing wel mogelijk is. Een alternatief daarvoor is om simulatie toe te passen op het oorspronkelijke probleem. Bij simulatie worden grootheden door experimenten bepaald. Op grond van de uitkomsten doen we statistische uitspraken over het model. Bij het toepassen van simulatie kunnen de volgende stadia worden onderscheiden.

a. Formulering van het probleem

In dit stadium wordt het probleem verbaal omschreven en zal men zich bezig houden met de vragen die beantwoord moeten worden. De doelstellingen van het experiment dienen expliciet vastgesteld te worden.

b. Constructie van het wiskundig model

Uitgaande van de in stap a geformuleerde doelstellingen zal men het probleem nu in een wiskundige vorm, d.w.z. met variabelen en relaties ertussen, gaan modelleren. Als het model een systeem op één vast tijdstip beschrijft, dan spreken we van een statisch simulatie model (ook wel *Monte Carlo simulatie* genoemd). Beschrijft het model het systeem gedurende de tijd, waarbij de toestand van het systeem wijzigt op stochastische tijdstippen, dan spreken we over *discrete-event simulatie* dan hebben we te maken met een *dynamisch model*.

Als het wiskundig model is opgesteld, dan moet worden nagegaan of het model geschikt is. Dit heet *verificatie* en *validatie*. Verificatie houdt in dat wordt nagegaan of het model doet wat de ontwerper wil dat het model doet; validatie betekent dat het model een goede voorstelling van de werkelijkheid is.

c. Ontwerp van het experiment

Nadat het model is geconstrueerd wordt een serie experimenten uitgevoerd om bepaalde gegevens te verkrijgen waaruit de conclusies zullen worden getrokken. Daarbij moet van tevoren over het volgende worden beslist:

- Wat moet worden berekend en hoe worden de berekeningen uitgevoerd?
- Hoe groot is het aantal series experimenten?
- Wat is de lengte van iedere serie?

Deze grootheden moeten zo worden vastgesteld dat de gewenste statistische eigenschappen (bijv. een zekere betrouwbaarheid) worden bereikt.

d. Ontwikkelen van het computerprogramma

Voor het uitvoeren van de experimenten dient een computerprogramma geschreven te worden. Het administreren van de opeenvolgende gebeurtenissen en het opbouwen van het daarop betrekking hebbend statistische cijfermateriaal is vaak een gecompliceerde en tijdrovende zaak.

Wegens het vaak gebruiken van de simulatietechniek zijn er speciale talen ontwikkeld, waarin vaak voorkomende formuleringen door eenvoudige standaarduitdrukkingen kunnen worden voorgesteld.

e. Controle op de validiteit van het model

In deze fase gaat men na of het model een goede afspiegeling van de werkelijkheid is, d.w.z. of de aspecten waaraan men wil gaan experimenteren goed zijn weergegeven. Hierbij kan de moeilijkheid optreden dat men de resultaten van het model niet goed kan vergelijken met de werkelijkheid, bijv. wanneer men een model heeft van een nog te ontwerpen systeem.

f. Uitvoeren van het experiment

Als de voorafgaande stadia zijn doorlopen, dan kunnen de experimenten worden uitgevoerd. Meestal levert dit een zeer groot aantal getallen (data) op. Het is gewenst deze op een overzichtelijke manier te presenteren en tussentijdse berekeningen uit te voeren.

g. Het analyseren van de gegevens

Uit de verkregen gegevens zal een aantal grootheden, zoals gemiddelden en varianties, worden berekend. Bij de verwerking van de gegevens moet er naar worden gestreefd om de varianties zo klein mogelijk te krijgen. Ook is het gewenst om statistische uitspraken te doen over de betrouwbaarheid.

6.2 Statistische verwerking van gegevens

Veronderstel dat $X_1, X_2, \dots, X_n$ onafhankelijke realisaties zijn van een stochastische variabele met onbekende verwachting μ en onbekende variantie σ^2 . Het gemiddelde van deze n realisaties,

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

heet het *steekproefgemiddelde*. De *steekproefvariantie* S_n^2 is gedefinieerd door

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Uit de statistiek is bekend¹ dat $\mathbb{E}\{\bar{X}_n\} = \mu$ en $\mathbb{E}\{S_n^2\} = \sigma^2$, d.w.z. dat $\bar{X}_n$ en S_n^2 zuivere schatters van μ resp. σ^2 zijn. Verder is $\text{var}\{\bar{X}_n\} = \frac{\sigma^2}{n}$. Bovendien geldt volgens de *Sterke wet van de grote aantallen*² dat $\bar{X}_n$ in waarschijnlijkheid convergeert naar μ , d.w.z. voor iedere $\varepsilon > 0$ geldt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon\} = 1$.

We zullen het steekproefgemiddelde $\bar{X}_n$ gebruiken als schatting voor de onbekende verwachting μ en de vraag is hoe betrouwbaar deze schatting is. We gebruiken hiervoor de *centrale limietstelling*³ die zegt dat voor voldoende grote n de stochast

$$\bar{Y}_n := \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

bij benadering standaard normaal verdeeld is, d.w.z. dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\bar{Y}_n \leq x) = \Phi(x)$ voor alle x , waarbij $\Phi(x)$ de verdelingsfunctie van de $N(0, 1)$ -verdeling is.

Een probleem om dit resultaat toe te kunnen passen is dat we σ in het algemeen niet kennen. Dit probleem kan gelukkig worden opgelost door i.p.v. σ de steekproefdeviatie S_n te nemen. Volgens een resultaat dat bekend staat als de *Stelling van Slutsky*⁴ geldt namelijk dat voor

$$\bar{Z}_n := \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}}$$

ook $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\bar{Z}_n \leq x) = \Phi(x)$ voor alle x . Dit betekent dat voor n voldoende groot $\bar{Z}_n$ bij benadering $N(0, 1)$ -verdeeld is.

In deze paragraaf bestuderen we het probleem hoe groot n moet zijn opdat $\bar{X}_n$ een betrouwbare schatting van μ is en aansluitend hierop willen we een interval aangeven waar μ met een bepaalde waarschijnlijkheid in ligt, d.w.z. we willen het volgende probleem oplossen: gegeven α en ε , hoe groot moet n zijn opdat $\bar{X}_n$ met een kans van minstens $1 - \alpha$ niet verder dan ε van μ af ligt.

Laat $z_{\frac{1}{2}\alpha}$ het $\frac{1}{2}\alpha$ -percentiel van de $N(0, 1)$ -verdeling zijn, d.w.z. $\mathbb{P}\{-z_{\frac{1}{2}\alpha} \leq Z \leq z_{\frac{1}{2}\alpha}\} = 1 - \alpha$ met Z een $N(0, 1)$ -verdeelde stochastische variabele. Voor n voldoende groot weten we dat

$$1 - \alpha \approx \mathbb{P}\left\{-z_{\frac{1}{2}\alpha} \leq \bar{Z}_n \leq z_{\frac{1}{2}\alpha}\right\} = \mathbb{P}\left\{\bar{X}_n - \frac{z_{\frac{1}{2}\alpha} S_n}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + \frac{z_{\frac{1}{2}\alpha} S_n}{\sqrt{n}}\right\},$$

d.w.z. dat $\left\{\bar{X}_n - \frac{z_{\frac{1}{2}\alpha} S_n}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{z_{\frac{1}{2}\alpha} S_n}{\sqrt{n}}\right\}$ het benaderend $100(1 - \alpha)\%$ *betrouwbaarheidsinterval* is. Bovenstaande moet niet worden geïnterpreteerd als de kans dat μ in dit interval ligt. De grootheid μ is geen stochastische variabele, maar een (onbekend) getal dat wel of niet in het interval ligt. Elke keer als een simulatierun wordt uitgevoerd, vind je een betrouwbaarheidsinterval met in het algemeen andere grenzen. De juiste interpretatie is: als je vele malen onafhankelijk van elkaar n waarnemingen doet en telkens het bijbehorende betrouwbaarheidsinterval bepaalt, dan zal in ongeveer $100(1 - \alpha)\%$ van de gevallen μ in dit interval liggen.

¹L.J. Bain and M. Engelhardt, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, Duxbury (1987) p. 183.

²L.J. Bain and M. Engelhardt, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, Duxbury (1987) p. 243.

³L.J. Bain and M. Engelhardt, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, Duxbury (1987) p. 235.

⁴L.J. Bain and M. Engelhardt, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, Duxbury (1987) p. 246.

Hoe groot n gekozen moet worden opdat $\bar{Z}_n$ bij benadering normaal verdeeld is, hangt sterk af van de onderliggende kansverdeling van de beschouwde stochastische variabele X . We volstaan met een pragmatische opmerking dat het aantal waarnemingen vrij groot moet zijn om een niet al te groot betrouwbaarheidsinterval te krijgen en dat bij symmetrische kansverdelingen de convergentie sneller gaat dan bij asymmetrische kansverdelingen. In de praktijk worden in een simulatierun steeds nieuwe waarnemingen gegenereerd totdat de gewenste breedte ε van het betrouwbaarheidsinterval is bereikt, d.w.z. $\frac{z_{\frac{1}{2}\alpha} S_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}\varepsilon$, ofwel $n \geq \left(2 \frac{z_{\frac{1}{2}\alpha} S_n}{\varepsilon}\right)^2$. Voor toenemende n zal S_n niet al te zeer veranderen (S_n^2 is een zuivere schatter van σ^2), zodat $\sqrt{n}$ in feite de breedte van het interval bepaalt. Om een twee keer zo klein interval te krijgen zijn dus vier keer zoveel waarnemingen nodig.

Een andere manier om het interval te verkleinen (zonder het aantal waarnemingen te vergroten) is om op de een of andere manier de steekproefvariantie S_n^2 te verkleinen. Dit heet *variantiereductie* en zal in paragraaf 6.5 worden besproken.

Bij onze berekeningen gebruiken we $\bar{X}_n$ en S_n^2 . Voor een volgende n , hoeven we deze waarden niet van vooraf aan uit te rekenen. We kunnen handig gebruikmaken van de volgende recurrrente betrekkingen (ga zelf de juistheid na, zie ook Opgave 6.1):

$$\bar{X}_{n+1} = \bar{X}_n + \frac{X_{n+1} - \bar{X}_n}{n+1} \quad \text{en} \quad S_{n+1}^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) S_n^2 + (n+1)(\bar{X}_{n+1} - \bar{X}_n)^2.$$

Het bovenstaande leidt tot het volgende algoritme om te bepalen wanneer we stoppen met een simulatierun. Omdat bovenstaande analyse alleen valide is voor grote waarden van n , voeren we in ieder geval een vrij groot aantal, zeg N , iteraties uit voor we nagaan of we al kunnen stoppen. In de praktijk wordt als orde van grootte voor N genomen: $N \approx 50$.

Algoritme 6.1 *Grootte van een simulatierun*

1. a. Kies ε , α en N , doe twee waarnemingen X_1 en X_2 en laat $n = 2$.
b. Bereken $\bar{X}_n = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$ en $S_n^2 = (X_1 - \bar{X}_n)^2 + (X_2 - \bar{X}_n)^2$.
2. Als $n \geq N$ en $n \geq \left(\frac{2z_{\frac{1}{2}\alpha}}{\varepsilon}\right)^2 S_n^2$: neem $\bar{X}_n$ als schatting voor de te bepalen grootte en STOP.

Anders: ga naar stap 3.

3. a. Doe een nieuwe waarneming X_{n+1} .
b. Bereken $\bar{X}_{n+1} = \bar{X}_n + \frac{X_{n+1} - \bar{X}_n}{n+1}$ en $S_{n+1}^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) S_n^2 + (n+1)(\bar{X}_{n+1} - \bar{X}_n)^2$.
c. $n := n + 1$ en ga naar stap 2.

Opmerking:

Stel dat de waarnemingen $X_1, X_2, \dots, X_n$ alleen de waarden 0 of 1 kunnen aannemen (Bernoulli

data). In dat geval simuleer je in feite een onbekende kans p , waarbij

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{met kans } p \\ 0 & \text{met kans } 1 - p. \end{cases}$$

We willen dus $\mathbb{E}\{X\} = p$ schatten. Omdat we weten dat $\text{var}\{X\} = p(1 - p)$, is het niet nodig om de steekproefvariantie S_n^2 te gebruiken als benadering voor deze variantie. Een natuurlijke schatting voor de variantie is dan $\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)$. Voor Bernoulli data is $S_n^2 = \frac{n}{n-1} \bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)$ (zie Vraag 6.1). Bovenstaand Algoritme 6.1 kan dan eenvoudig zo worden aangepast dat alleen $\bar{X}_n$ wordt gebruikt.

Het betrouwbaarheidsinterval wordt dan: $\left\{ \bar{X}_n - \frac{z_{\frac{1}{2}\alpha}}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}, \bar{X}_n + \frac{z_{\frac{1}{2}\alpha}}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)} \right\}$.

Deze formule geeft ook inzicht in simulatie om zeer kleine kansen te bepalen. Stel bijvoorbeeld dat de te simuleren kans van de orde 10^{-6} is en je wilt een 95% betrouwbaarheidsinterval (d.w.z. $\alpha = 0.05$ en $z_{\frac{1}{2}\alpha} = 1.96$) met een intervalbreedte van 10^{-8} .

Omdat $\bar{X}_n \approx 10^{-6}$, geldt $\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n) \approx 10^{-6}$, zodat moet gelden: $2 \cdot \frac{1.96}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{10^{-6}} \leq 10^{-8}$, d.w.z. dat ruwweg moet gelden: $\frac{4}{\sqrt{n}} \leq 10^{-5}$, ofwel $n \geq 16 \times 10^{10} = 160$ miljard. Het aantal trekkingen wordt dus gigantisch groot als je een kleine kans nauwkeurig wilt bepalen.

Soms is het helaas niet mogelijk, of te kostbaar, om een groot aantal waarnemingen te doen. In dat geval is bovenstaande aanpak niet verantwoord. Dan kan $\bar{Z}_n$ niet als $N(0, 1)$ -verdeeld worden beschouwd. In dat geval is wel een zinvolle analyse mogelijk onder de volgende aanname:

Aanname 6.1

$X_1, X_2, \dots, X_n$ zijn normaal verdeeld, zeg $N(\mu, \sigma^2)$.

Onder deze aanname heeft $\bar{Z}_n$ een zogenaamde *Student-verdeling* met $n-1$ vrijheidsgraden.⁵ Deze verdeling is net als de standaard normale verdeling symmetrisch om 0. Voor $n \rightarrow \infty$ convergeert de Student-verdeling naar de $N(0, 1)$ -verdeling. Analooq aan onze eerdere analyse geldt dat

$$1 - \alpha \approx \mathbb{P} \left\{ -t_{\frac{1}{2}\alpha}(n-1) \leq \bar{Z}_n \leq t_{\frac{1}{2}\alpha}(n-1) \right\} = \mathbb{P} \left\{ \bar{X}_n - \frac{t_{\frac{1}{2}\alpha}(n-1)S_n}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + \frac{t_{\frac{1}{2}\alpha}(n-1)S_n}{\sqrt{n}} \right\},$$

waarbij $t_{\frac{1}{2}\alpha}(n-1)$ een waarde is die voor een aantal waarden voor α en n uit een tabel is af te lezen (Tabel II). Bijvoorbeeld als $\alpha = 0.05$ en $n = 15$, dan is $t_{\frac{1}{2}\alpha}(n-1) = 2.145$.

Voor uitspraken over de variantie, weer onder de aanname dat de trekkingen X_i normaal verdeeld zijn, gaan we als volgt te werk. Zij $T_{n-1} = (n-1) \frac{S_n^2}{\sigma^2}$, dan heeft deze stochast een Chi-kwadraat verdeling met $(n-1)$ vrijheidsgraden,⁶ waarvoor geldt dat $\mathbb{E}\{T_{n-1}\} = n-1$ en $\text{var}\{T_{n-1}\} = 2(n-1)$.

M.b.v. Tabel III kunnen bij gegeven n en α met waarschijnlijkheid $1 - \alpha$ grenzen voor σ^2 worden bepaald, volgens: $\mathbb{P} \left\{ \frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{\frac{1}{2}\alpha}^2(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{1-\frac{1}{2}\alpha}^2(n-1)} \right\} = 1 - \alpha$. Als $\alpha = 0.05$ en $n = 15$, dan is $\chi_{\frac{1}{2}\alpha}^2(n-1) = 26.119$ en $\chi_{1-\frac{1}{2}\alpha}^2(n-1) = 5.629$ (zie Tabel III).

⁵L.J. Bain and M. Engelhardt, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, Duxbury (1987) p. 220.

⁶L.J. Bain and M. Engelhardt, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, Duxbury (1987) p. 217.

Vraag 6.1

Veronderstel dat de waarnemingen $X_1, X_2, \dots \in \{0, 1\}$.

Toon dan aan dat voor $n \geq 2$ geldt: $S_n^2 = \frac{n}{n-1} \bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)$.

6.3 Voorbeelden van simulaties

We zullen in deze paragraaf een viertal voorbeelden bespreken. In de eerste drie voorbeelden is simulatie niet echt nodig omdat analytische oplossingen bekend zijn, maar ze worden hier gepresenteerd om er de verschillende onderdelen van simulatie mee te illustreren. De eerste twee voorbeelden betreffen een statisch model, de laatste twee zijn dynamisch.

Voorbeeld 6.1

Veronderstel dat je moet beslissen of je het volgende spel wel of niet speelt:

Gooi steeds een zuivere munt op totdat het verschil tussen het aantal keren kop en munt drie is. Iedere worp kost één euro en als het verschil tussen kop en munt drie geworden is, dan ontvang je 8 euro en wordt het spel gestopt.

Hoe kom je met computersimulatie tot een beslissing? Een computer kan geen munt opgooien, maar wel zogenaamde *aselecte getallen* (zie ook de volgende paragraaf) genereren. Veronderstel dat we aselecte getallen van één cijfer gaan genereren, en dat we $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ associëren met 'kop' en $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ met 'munt'. Veronderstel dat we afspreken dat we het spel 14 keer spelen. Laat de computer de volgende worpen genereren: 8, 1, 3, 7, 2, 7, 1, 6, 5, 5, 7, 9, 0, 0, 3, 4, 3, 5, 6, 8, 5, 8, 9, 4, 8, 0, 4, 8, 6, 5, 3, 5, 9, 2, 5, 7, 9, 7, 2, 9, 3, 9, 8, 5, 8, 9, 2, 5, 7, 6, 0, 7, 3, 9, 8, 2, 7, 1, 0, 3, 2, 6, 2, 7, 1, 3, 7, 0, 4, 4, 1, 8, 3, 2, 1, 3, 9, 5, 9, 0, 5, 0, 3, 8, 7, 8, 5, 4, 0, 8, 3, 8, 0.

We hebben in feite 14 keer het spel gesimuleerd met de volgende resultaten (ga dit zelf na):

spel	resultaat	aantal worpen
1	M K K M K M K M M M M	11
2	M K K K K	5
3	K M M M M	5
4	M M K M K K M M M	9
5	K M M K M M M	7
6	M K M K M M M	7
7	M M K M M	5
8	M M M	3
9	M K M K M M K M K K K M K M K K	17
10	M K K K K	5
11	M K K K K	5
12	M M M	3
13	K M K K M M M M M	9
14	K K M K M K K	7

Het gaat erom informatie te verkrijgen over het gemiddeld aantal worpen nodig om een spel te spelen en op grond daarvan te beslissen of je het spel wilt spelen: als het verwachte aantal worpen minder is dan 8, dan is het (op de lange duur) gunstig om het spel te spelen en anders niet. We kunnen nu de volgende berekeningen uitvoeren met X_i = het aantal worpen in het i -de spel.

Steekproefgemiddelde $\bar{X}_{14} = (11 + 5 + \dots + 7)/14 = 7.00$.

Steekproefvariantie $S_{14}^2 = \{(11 - 7.00)^2 + (5 - 7.00)^2 + \dots + (7 - 7.00)^2\}/13 = 13.54$.

We veronderstellen dat het aantal worpen in een spel $N(\mu, \sigma^2)$ -verdeeld is. Om kansuitspraken over μ en σ te doen met een betrouwbaarheid van 95%, nemen we $\alpha = 0.05$.

Omdat $t_{0.025}(13) = 2.160$ (zie Tabel II) en $\chi_{0.025}^2(13) = 24.736$ en $\chi_{0.975}^2(13) = 5.009$ (zie Tabel III) gelden de volgende uitspraken met kans 0.95:

$$\begin{aligned} \bar{X}_{14} - t_{0.025}(13) \cdot \frac{S_{14}}{\sqrt{14}} &\leq \mu \leq \bar{X}_{14} + t_{0.025}(13) \cdot \frac{S_{14}}{\sqrt{14}} \quad \text{d.w.z. } 4.89 \leq \mu \leq 9.11 \\ \frac{13S_{14}^2}{\chi_{0.025}^2(13)} &\leq \sigma^2 \leq \frac{13S_{14}^2}{\chi_{0.975}^2(13)} \quad \text{d.w.z. } 7.11 \leq \sigma^2 \leq 35.1 \end{aligned}$$

Hoewel het steekproefgemiddelde $\bar{X}_{14}$ lager is dan 8 (d.w.z. dat het spel spelen gunstig is), is het niet evident welke beslissing genomen moet worden. Hiervoor zal het aantal gesimuleerde spelen veel groter moeten zijn.

Voorbeeld 6.2

Dit voorbeeld is een typisch voorbeeld van Monte Carlo simulatie. Veronderstel dat we π willen benaderen. Beschouw een stuk van de eenheidscirkel in het eerste kwadrant (met oppervlakte $\frac{1}{4}\pi$) en het eenheidsvierkant (met oppervlakte 1). De fractie van het eenheidsvierkant dat binnen de eenheidscirkel ligt is $\frac{1}{4}\pi$. Als we een groot aantal punten willekeurig in het eenheidsvierkant kiezen, dan is de fractie van de punten die ook binnen de eenheidscirkel liggen gelijk aan $\frac{1}{4}\pi$. Een trekking (x, y) uit het eenheidsvierkant krijgen we door onafhankelijk van elkaar twee willekeurige getallen uit het interval $[0, 1]$ te trekken. Het punt (x, y) ligt binnen de eenheidscirkel als $x^2 + y^2 \leq 1$.

Voor trekkingen uit het interval $[0, 1]$ kunnen we de aselechte getallen van 5 cijfers uit Tabel IV nemen. De eerste twee getallen zijn 0.09656 en 0.96657 met $0.09656^2 + 0.96657^2 = 0.94358 < 1$: het getallenpaar $(0.09656, 0.96657)$ ligt dus binnen de eenheidscirkel. Tabel IV bevat 200 getallen en beschouw deze als 4 series van elk 25 getallenparen. De verwachte uitkomst per serie is dus $\frac{25}{4}\pi$. In onderstaande tabel staan de resultaten.

serie	1	2	3	4
aantal in eenheidscirkel	23	19	19	22

Dit geeft:

steekproefgemiddelde $\bar{X}_4 = \{23 + 19 + 19 + 22\}/4 = 20.75$;

steekproefvariantie $S_4^2 = \{(23 - 20.75)^2 + (19 - 20.75)^2 + (19 - 20.75)^2 + (22 - 20.75)^2\}/3 = 4.25$.

De schatting voor π volgt uit $\frac{25}{4}\pi = 20.75$, d.w.z. $\pi = 3.32$. Voor een statistische uitspraak met een betrouwbaarheid van 90% moeten we kijken bij de Student-verdeling met 3 vrijheidsgraden

en met $t_{0.05}(3) = 2.353$. Met kans 90% ligt $\frac{25}{4}\pi$ tussen $20.75 - 2.353 \cdot \frac{S_4}{\sqrt{4}} \approx 18.33$ en $20.75 + 2.353 \cdot \frac{S_4}{\sqrt{4}} \approx 23.17$, d.w.z. met kans 90% ligt π tussen 2.93 en 3.71. We zien dat we voor een betrouwbare schatting binnen een klein interval veel waarnemingen nodig hebben. Voor een 90% betrouwbare uitspraak over de variantie gebruiken we de Chi-kwadraatverdeling met 3 vrijheidsgraden: $\frac{3S^2}{\chi_{0.05}^2(3)} = \frac{12.75}{7.815} \approx 1.63 \leq \sigma^2 \leq \frac{3S^2}{\chi_{0.95}^2(3)} = \frac{12.75}{0.352} \approx 36.22$. Voor de variantie van de schatting voor π moeten we deze getallen delen door $\left(\frac{25}{4}\right)^2 = 39.0625$. Deze variantie ligt dus tussen 0.04 en 0.93.

Voorbeeld 6.3

Beschouw een voorraadmodel met een stochastische vraag. Uit het verleden zijn de volgende gegevens over de vraag per dag en over de levertijd (in dagen) bekend:

vraag	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
frequentie	0.26	0.14	0.12	0.10	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0.01	0.01
levertijd	7	8	9	10	11	12	13	14						
frequentie	0.07	0.13	0.18	0.26	0.18	0.10	0.05	0.03						

De verwachting en de variantie van de vraag kunnen geschat worden door:

$$\bar{X} = \{26 \times 0 + 14 \times 2 + \dots + 1 \times 13\}/100 = 3.21$$

$$S^2 = \{26 \times (0 - 3.21)^2 + 14 \times (1 - 3.21)^2 + \dots + 1 \times (13 - 3.21)^2\}/99 = 10.29$$

Analoog kan $\bar{L}$, de verwachting van de levertijd, geschat worden door:

$$\bar{L} = \{7 \times 7 + 13 \times 8 + \dots + 3 \times 14\}/100 = 10.00$$

Verder hanteren we de volgende gegevens voor dit model, waarbij een jaar bestaat uit 250 (werk)dagen:

vaste bestelkosten	: 4,50 euro
verwachte vraag per jaar	: 800 stuks
voorraadkosten per stuk per jaar	: 2,00 euro
kosten per tekort	: 1,50 euro

We zullen in dit voorbeeld een zogenaamde (Q, r) -strategie analyseren. Een (Q, r) -strategie is een strategie die iedere keer als de voorraad r is een hoeveelheid Q bestelt. We zullen in dit voorbeeld voor de (Q, r) -strategie met $Q = 65$ en $r = 45$ de bijbehorende kosten schatten.

Het simulatiemodel gebruikt equidistante tijdstippen (per dag wordt het systeem bekeken) en het volgende wordt gesimuleerd:

de *vraag*: deze wordt door aselechte getallen van twee cijfers gegenereerd: 00 – 25 (26%) voor een vraag 0, 26 – 39 (14%) voor een vraag 1, enz. tot en met 99 (1%) voor vraag 13.

de *levertijd*: deze trekkingen kunnen op analoge wijze met aselechte getallen van twee cijfers gegenereerd worden: 00 – 06 (7%) voor levertijd van 7 dagen, 07 – 19 (13%) voor levertijd van 8 dagen, ..., 97 – 99 (3%) voor een levertijd van 14 dagen.

Hiermee kunnen we de vraag, de voorraad, de tekorten en de bestellingen administreren, waaruit de jaarlijkse kosten eenvoudig kunnen worden berekend.

Veronderstel dat de simulatie gedurende 1000 dagen wordt uitgevoerd en dat dit de volgende jaargemiddelden oplevert:

vraag	:	780
gemiddelde voorraad	:	48
aantal bestellingen	:	13
aantal tekorten	:	9

Hiermee kunnen de totale kosten worden berekend: $48 \times 2 + 9 \times 1,50 + 13 \times 4,50 = 168$ euro.

Laten we op deze wijze een achttal runs uitvoeren met als jaarlijkse kosten:

run	1	2	3	4	5	6	7	8
kosten (in euro's)	168	143	152	171	159	162	171	154

Dit geeft voor de jaarlijkse kosten:

$$\begin{aligned}
 \text{steekproefgemiddelde } \bar{X}_8 &= \{168 + 143 + 152 + 171 + 159 + 162 + 171 + 154\}/8 = 160; \\
 \text{steekproefvariantie } S_8^2 &= \{(168 - 160)^2 + (143 - 160)^2 + (152 - 160)^2 + (171 - 160)^2 \\
 &\quad + (159 - 160)^2 + (162 - 160)^2 + (171 - 160)^2 + (154 - 160)^2\}/7 \\
 &= 100.
 \end{aligned}$$

Willen we met een betrouwbaarheid van 95% statistische uitspraken doen over de jaarlijkse kosten, dan moeten we kijken bij de Student-verdeling met 7 vrijheidsgraden en met $t_{0,025}(7) = 2.363$. Met kans 95% liggen de jaarlijkse kosten tussen $160 - 2.363 \cdot \frac{S_8}{\sqrt{8}} \approx 151.6$ en $160 + 2.363 \cdot \frac{S_8}{\sqrt{8}} \approx 168.4$ euro. Voor een 95% betrouwbare uitspraak over de variantie gebruiken we de Chi-kwadraatverdeling met 7 vrijheidsgraden: $\frac{7S^2}{\chi_{0,025}^2(7)} = \frac{700}{16.013} \approx 43.7 \leq \sigma^2 \leq \frac{7S^2}{\chi_{0,975}^2(7)} = \frac{700}{1.690} \approx 414$.

Voorbeeld 6.4

Beschouw een wachtrijmodel met één bediende. Veronderstel dat zowel de tussentijden tussen de aankomsten als de bedieningsduren een uniforme verdeling hebben op resp. $\{6, 8, 10, \dots, 24\}$ en $\{1, 3, 5, \dots, 19\}$. Voor dit model zijn geen analytische resultaten bekend.

Veronderstel dat de tussentijden en bedieningsduren met aselechte getallen van één cijfer worden gegenereerd: het aselechte getal i ($0 \leq i \leq 9$) correspondeert met een tussentijd $6 + 2i$ en met een bedieningsduur $1 + 2i$ ($0 \leq i \leq 9$); voor de tussentijden en bedieningsduren trekken we uiteraard aparte getallen.

Bij dit model houden we steeds het volgende bij:

- de relevante tijdstippen: aankomsten en vertrekken;
- het aantal klanten in het systeem;
- het getrokken aselechte getal: als er een klant binnenkomt dan trekken we de volgende tussentijd, gaat er een klant weg dan trekken we de volgende bedieningsduur (als een klant binnenkomt op het moment dat het systeem leeg is dan trekken we zowel de tussentijd als de bedieningsduur) het tijdstip waarop een volgende klant zal binnenkomen;
- het tijdstip waarop de volgende bediening klaar zal zijn.

De volgende tabel een voorbeeld van mogelijke data.

tijdstip	aantal klanten	aselect(e) getal(len)	volgende aankomst	volgend vertrek
0	0	9	24	n.v.t.
24	1	2,6	34	37
34	2	4	48	37
37	1	6	48	50
48	2	4	62	50
50	1	1	62	53
53	0	n.v.t.	62	n.v.t.
62	1	1,1	70	65
65	0	n.v.t.	70	n.v.t.
70	1	3,9	82	89
82	2	1	90	89
89	1	4	90	98
90	2	1	98	98
98	2	1,5	106	109
106	3	6	124	109
109	2	2	124	114
114	1	1	124	117
117	0	n.v.t.	124	n.v.t.
124	1	5,6	140	137
137	0	n.v.t.	140	n.v.t.
140	1	9,3	164	147
147	0	n.v.t.	164	n.v.t.
164	1			

We zijn geïnteresseerd in de wachttijden van de klanten. Zij voor de i -de klant X_i en Y_i de tijden die de i -de klant in het systeem resp. de wachtrij doorbrengt.

De simulatie heeft het volgende opgeleverd:

$$\begin{aligned}
 X_1 = 13 \quad Y_1 = 0 \quad X_2 = 16 \quad Y_2 = 3 \quad X_3 = 5 \quad Y_3 = 2 \quad X_4 = 3 \quad Y_4 = 0 \\
 X_5 = 19 \quad Y_5 = 0 \quad X_6 = 16 \quad Y_6 = 7 \quad X_7 = 19 \quad Y_7 = 8 \quad X_8 = 16 \quad Y_8 = 11 \\
 X_9 = 11 \quad Y_9 = 8 \quad X_{10} = 13 \quad Y_{10} = 0 \quad X_{11} = 7 \quad Y_{11} = 0
 \end{aligned}$$

Voor het steekproefgemiddelde en de steekproefvariantie van deze data geldt:

$$\text{Tijd in systeem: steekproefgemiddelde} = \frac{138}{11} = 12.55 \text{ en steekproefvariantie} = \frac{300.73}{10} = 30.07.$$

$$\text{Tijd in wachtrij: steekproefgemiddelde} = \frac{39}{11} = 3.55 \text{ en steekproefvariantie} = \frac{172.73}{10} = 17.27.$$

Ook in dit geval is het in principe weer mogelijk om statistische uitspraken op te stellen met betrouwbaarheidsintervallen. Om tot zinvolle uitspraken te komen zijn echter veel meer data nodig.

Vraag 6.2

Toon analytisch aan dat het verwachte aantal worpen voordat het spel van Voorbeeld 6.1 uit is, gelijk is aan 9.

6.4 Aselecte getallen en aselecte trekkingen

We hebben in de vorige paragraaf gezien dat aselecte getallen een belangrijke rol spelen bij simulatie, omdat er trekkingen uit kansverdelingen mee gegenereerd kunnen worden. In deze paragraaf zullen we dit onderwerp nader uitwerken.

Aselecte getallen kunnen op de volgende manier worden verkregen:

a. Door een fysisch experiment uit te voeren:

Bijvoorbeeld door worpen te doen met een tienkantige dobbelsteen kunnen de 10 getallen van één cijfer (0 t/m 9) worden gegenereerd. Vijftallen van 5 opeenvolgende worpen geven dan aselecte trekkingen van de getallen 00000, 00001, ..., 99999.

b. Met behulp van een algoritme:

Bijvoorbeeld met de zogenaamde *congruentie methode*. Beschouw de congruentie

$x_{n+1} \equiv ax_n + c \pmod{m}$ met $a < m$, $c < m$ en x_0 willekeurig. Als x_0 wordt gekozen, dan liggen alle getallen x_n volledig vast: we spreken daarom van *pseudo aselecte getallen*.

Lang niet alle waarden van a, c en m zijn geschikt. Voor m wordt meestal een zeer groot getal gekozen. Bekend is dat de keuze $a = 843314861$, $c = 453816693$ en $m = 2^{31} = 2147483648$ goed voldoet om getallen te genereren die statistisch gezien niet van echte aselecte getallen te onderscheiden zijn.

We zullen nu aangeven hoe trekkingen uit een kansverdeling gegenereerd kunnen worden m.b.v. (pseudo) aselecte getallen. Dit gebeurt met de *inverse transformatie methode*. Het idee hierbij is om een random getal te genereren uit een uniforme verdeling en hiermee (via een formule) een random getal uit een andere verdeling te bepalen. Dat dit in principe mogelijk is, is gebaseerd op het volgende lemma.

Lemma 6.1

Zij U een stochastische variabele die uniform verdeeld is op $[0, 1]$. Dan geldt voor iedere verdelingsfunctie F dat de stochastische variabele X , gedefinieerd door $X = F^{-1}(U)$, de functie F als verdelingsfunctie heeft.

Bewijs

$\mathbb{P}\{X \leq x\} = \mathbb{P}\{F^{-1}(U) \leq x\} = \mathbb{P}\{U \leq F(x)\} = F(x)$, de laatste gelijkheid omdat U uniform verdeeld is. □

Dit lemma kan nu als volgt worden toegepast om een aselechte trekking te genereren uit een kansverdeling met een bekende verdelingsfunctie $F(x)$:

1. Trek een u uit de uniforme verdeling m.b.v. (pseudo) aselechte getallen.
2. x , bepaald via $x = F^{-1}(u)$, is een aselechte trekking van de X met verdelingsfunctie F .

In sommige gevallen kan F expliciet worden bepaald of via een eenvoudig algoritme.

We geven enkele voorbeelden.

Uniforme verdeling

Veronderstel dat X uniform verdeeld is op $[a, b]$. Dan kan een random getal $u \in [0, 1]$ met een trekking van X worden geassocieerd d.m.v. $x = a + (b - a)u$.

Exponentiële verdeling, Erlang verdeling en Weibull verdeling

Veronderstel dat X een exponentiële verdeling heeft met parameter λ . Dan is de verdelingsfunctie $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Nu geldt:

$$u = F(x) \Leftrightarrow e^{-\lambda x} = 1 - u \Leftrightarrow -\lambda x = \ln(1 - u) \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u).$$

Omdat $1 - u$ ook een aselechte trekking is uit $[0, 1]$, mogen we $1 - u$ wel vervangen door u , d.w.z. de trekking geeft: $x = -\frac{1}{\lambda} \ln(u)$.

M.b.v. het bovenstaande kunnen we ook trekkingen uit een *Erlang verdeling* genereren. Zij X Erlang-verdeeld met parameters (λ, k) , d.w.z. $X = X_1 + X_2 + \dots + X_k$ met X_i een exponentiële verdeling met parameter λ , $1 \leq i \leq k$.

Het volgende algoritme geeft een trekking van X .

1. Genereer k random getallen $u_i \in [0, 1]$, $1 \leq i \leq k$.
2. Laat $x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(u_i)$, $1 \leq i \leq k$.
3. $x = \sum_{i=1}^k x_i$.

Ook een trekking uit een *Weibull verdeling* gaat op analoge wijze. Zij X Weibull verdeeld, dan is de verdelingsfunctie $F(x) = 1 - e^{-(\lambda x)^\alpha}$ (dus voor $\alpha = 1$ is dit de exponentiële verdeling).

Nu geldt:

$$u = F(x) \Leftrightarrow e^{-(\lambda x)^\alpha} = 1 - u \Leftrightarrow (\lambda x)^\alpha = -\ln(1 - u) \Leftrightarrow x = \frac{1}{\lambda} \{-\ln(1 - u)\}^{1/\alpha}.$$

We mogen $1 - u$ weer vervangen door u , d.w.z. de trekking geeft: $x = \frac{1}{\lambda} \{-\ln(u)\}^{1/\alpha}$.

Poisson proces

Veronderstel dat we de gebeurtenissen van een Poisson proces met parameter λ willen genereren gedurende het tijdsinterval $[0, T]$. Hiervoor maken we gebruik van de eigenschap dat de tussentijden exponentieel verdeeld zijn (met dezelfde parameter λ). We kunnen dus random trekkingen $u_i \in [0, 1]$ nemen en hieruit tussentijden $t_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(u_i)$ afleiden. Als we het proces gedurende $[0, T]$ willen genereren, kunnen we dat doen met het volgende algoritme, waarin i het aantal gebeurtenissen is.

1. $t_0 = 0$; $i = 0$.
 2. Genereer een random $u_i \in [0, 1]$.
 3. $t_{i+1} = t_i - \frac{1}{\lambda} \ln(u_i)$.
 4. Als $t_{i+1} > T$: stop.
- Anders: $i := i + 1$; ga naar stap 2.

Normale en lognormale verdeling

Veronderstel dat $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ -verdeeld is. In dit geval is de vergelijking $u = F(x)$ niet direct om te zetten in een expliciete formule voor x . Wel geldt de volgende afleiding die gebaseerd is op de centrale limietstelling.

Zij $U_1, U_2, \dots, U_n$ onderling onafhankelijke trekkingen uit de homogene verdeling op $[0, 1]$ en definieer T_n door: $T_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$.

Dan geldt (zie ook Vraag 6.3): $\mathbb{E}\{T_n\} = \frac{n}{2}$ en $\text{var}\{T_n\} = \frac{n}{12}$.

Zij $Z_n = \frac{T_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{n/12}}$. Volgens de Centrale limietstelling is Z_n asymptotisch $N(0, 1)$ -verdeeld. In de praktijk kan Z_n al voor redelijk kleine waarden van n als $N(0, 1)$ -verdeeld beschouwd worden.

We nemen daarom maar aan dat Z_{12} een $N(0, 1)$ -verdeling heeft. Merk op dat $Z_{12} = T_{12} - 6$.

$\frac{X - \mu}{\sigma}$ is eveneens $N(0, 1)$ -verdeeld. Z_{12} kan dus worden opgevat als een waarneming van $\frac{X - \mu}{\sigma}$.

Zij $u_1, u_2, \dots, u_{12}$ onafhankelijke trekkingen uit de homogene verdeling op $[0, 1]$, dan kan x , met $x = \mu + \sigma \left\{ \sum_{i=1}^{12} u_i - 6 \right\}$ worden opgevat als een waarneming van de $N(\mu, \sigma)$ -verdeelde X .

Er bestaan snellere methoden om random trekkingen te doen uit de normale verdeling.⁷

Het bovenstaande geeft ook trekkingen uit een *lognormale verdeling*. X is lognormaal verdeeld met parameters μ en σ als de stochast $Y = \ln(X)$ een $N(\mu, \sigma^2)$ -verdeling heeft. Omdat $Y = \ln(X) \Leftrightarrow X = e^Y$, kan een trekking uit de lognormale verdeling als volgt worden verkregen.

1. Genereer een random trekking y uit de normale verdeling met parameters μ en σ .
2. Neem $x = e^y$.

Discrete verdeling

Hetzelfde principe kan ook worden toegepast op een discrete verdeling. In feite hebben we dit reeds gedaan in de voorbeelden 6.3 en 6.4. We zullen nog een voorbeeld geven.

Veronderstel dat $X = 0, 1, 2, 3$ met kans 0.1, 0.3, 0.4 en 0.2 respectievelijk.

Dan geldt voor de verdelingsfunctie $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0.1 & 0 \leq x < 1 \\ 0.4 & 1 \leq x < 2 \\ 0.8 & 2 \leq x < 3 \\ 1.0 & x = 3 \end{cases}$$

⁷Zie bijvoorbeeld J.H. Ahrends and U. Dieter, *An alias method for sampling from the normal distribution*, Computing 42 (1982) 159-170.

Zij u een aselekt getal uit $[0, 1]$, dan hoort hierbij de volgende x :

als $0.0 \leq u \leq 0.1 \rightarrow x = 0$; als $0.1 < u \leq 0.4 \rightarrow x = 1$;

als $0.4 < u \leq 0.8 \rightarrow x = 2$; als $0.8 < u \leq 1.0 \rightarrow x = 3$.

Veronderstel dat $X \in \{1, 2, \dots, n\}$, elk met kans $\frac{1}{n}$. Zij u een aselekt getal uit $[0, 1]$, dan hoort bij u de waarde $x = i \Leftrightarrow \frac{i-1}{n} \leq u < \frac{i}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$, d.w.z. $x = \lfloor nu \rfloor + 1$.

Poisson verdeling

Voor een stochastische variabele X met een Poisson verdeling met parameter λ geldt:

$$p_n = \mathbb{P}\{X = n\} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, n = 0, 1, \dots$$

Het genereren van trekkingen uit de uniforme verdeling op $[0, 1]$ is gebaseerd op het (eenvoudig te controleren) feit dat $p_0 = e^{-\lambda}$ en $p_{n+1} = \frac{\lambda}{n+1} p_n$, $n = 0, 1, \dots$.

We trekken eerst een willekeurig getal $u \in [0, 1]$.

Als $u < e^{-\lambda} = p_0$, dan associëren we deze trekking met $x = 0$, die immers een kans p_0 heeft.

Als $p_0 \leq u < p_0 + p_1 = p_0 + \lambda p_0$, dan associëren we deze trekking met $x = 1$, etc.

Dit geeft het volgende algoritme.

1. Trek random een $u \in [0, 1]$; $n = 0$; $p = e^{-\lambda}$; $F = p$.

2. Als $u < F$: neem $x = n$ en stop;

Anders: $p := \frac{\lambda}{n+1} p$, $F := F + p$; $n := n + 1$; en herhaal stap 2.

Omdat de verwachting van een Poisson verdeelde stochast de waarde λ heeft, is de verwachting van het aantal stappen van bovenstaand algoritme $\lambda + 1$.

Geometrische verdeling

Voor een stochastische variabele X met een geometrische verdeling met parameter p geldt:

$$\mathbb{P}\{X = n\} = pq^{n-1}, n = 1, 2, \dots, \text{ waarbij } 0 < p < 1 \text{ en } q = 1 - p.$$

De bijbehorende interpretatie is dat X de poging met het eerste succes is, als iedere poging succeskans p heeft: $\sum_{i=1}^n \mathbb{P}\{X = i\} = 1 - \text{kans geen succes in de eerste } n \text{ pogingen} = 1 - q^n$, $n \geq 1$.

We kunnen nu een trekking uit X genereren uit een trekking $u \in [0, 1]$ door $1 - q^{n-1} \leq u < 1 - q^n$ te associëren met $x = n$, immers:

$$\text{de kans hierop is } (1 - q^n) - (1 - q^{n-1}) = q^{n-1} - q^n = q^{n-1}(1 - q) = pq^{n-1} = \mathbb{P}\{X = n\}.$$

Omdat $1 - q^{n-1} \leq U < 1 - q^n \Leftrightarrow q^n < 1 - U \leq q^{n-1}$ geldt dat $X = \min\{n \mid q^n < 1 - U\}$.

Aangezien $1 - U$ ook uniform verdeeld is op $[0, 1]$, kunnen we voor x ook nemen:

$x = \min\{n \mid q^n < u\}$. Vervolgens merken we op dat de logaritme een monotone functie is, zodat tevens geldt:

$$x = \min\{n \mid n \log(q) < \log(u)\}, \text{ ofwel } x = \min\{n \mid n > \frac{\log(u)}{\log(q)}\}, \text{ m.a.w. } x = \lfloor \frac{\log(u)}{\log(q)} \rfloor + 1.$$

Binomiale verdeling

Voor een stochastische variabele X met een binomiale verdeling met parameters (n, p) geldt:

$$\mathbb{P}[X = i] = \binom{n}{i} p^i q^{n-i}, 0 \leq i \leq n, \text{ waarbij } 0 < p < 1 \text{ en } q = 1 - p.$$

De bijbehorende interpretatie is dat X het aantal successen uit n pogingen is, als iedere poging succeskans p heeft. In dit geval gebruiken we weer, net zoals bij de Poisson verdeling een recurrente relatie, namelijk dat $\mathbb{P}\{X = i + 1\} = \frac{n-i}{i+1} \cdot \frac{p}{q} \cdot \mathbb{P}\{X = i\}$, tezamen met de beginconditie dat $\mathbb{P}\{X = 0\} = q^n$. Dit geeft het volgende algoritme.

1. Trek random een $u \in [0, 1]$; $i = 0$; $a = \frac{p}{q}$; $b = q^n$; $F = b$.
2. Als $u < F$: neem $x = i$ en stop;
- Anders: $b := \frac{n-i}{i+1} \cdot a \cdot b$, $F := F + b$; $i := i + 1$; en herhaal stap 2.

Omdat de verwachting van de binomiale verdeling de waarde np heeft, is de verwachting van het aantal stappen van dit algoritme $np + 1$.

Als $p > \frac{1}{2}$, dan kunnen we het beter iets anders doen. Dan genereren we op analoge wijze een binomiaal verdeelde variabele bij de parameters (n, q) ; deze heeft de interpretatie van het aantal mislukkingen uit n trekkingen en de verwachting van het aantal benodigde iteraties van het algoritme van $nq + 1 < np + 1$ stappen. Tenslotte nemen we voor een trekking uit de oorspronkelijke X de waarde n minus de uitkomst van het algoritme.

Permutaties

Veronderstel dat we een random permutatie van de getallen van de getallen $1, 2, \dots, n$ willen genereren, d.w.z. dat ieder van de $n!$ mogelijke permutaties een gelijke kans heeft om gegenereerd te worden. We doen dit door eerst random een van de getallen $1, 2, \dots, n$ te trekken en deze op plaats n te zetten; daarna kiezen we random een van de overgebleven $n - 1$ getallen en zetten deze op plaats $n - 1$, etc. Het is handig en efficiënt de getallen $1, 2, \dots, n$ in een geordende lijst te zetten en dan random een van de n posities te kiezen in plaats van het getal zelf. Dit betekent dat we, startend met een beginordening $P_1, P_2, \dots, P_n$, random een van de getallen uit $1, 2, \dots, n$ kiezen, zeg getal i , waarna we P_n en P_i verwisselen. Daarna kiezen we random een van de getallen uit $1, 2, \dots, n$, zeg getal j , waarna we P_{n-1} en P_j verwisselen, etc.

Dit geeft het volgende algoritme, waarin met $P_i = i$, $i = 1, 2, \dots, n$ wordt gestart.

1. Start met $P_i = i$, $i = 1, 2, \dots, n$ en laat $k = n$.
2. Trek random een $u \in (0, 1)$ en laat $i = \lfloor k \cdot u \rfloor + 1$.
3. Verwissel de getallen op de plaatsen i en k ; $k := k - 1$; als $k \geq 2$: ga naar stap 2.
4. $P_1, P_2, \dots, P_n$ is de gegenereerde permutatie.

Opmerking:

Het bovenstaande idee kan ook gebruikt worden om random een deelverz. van r verschillende elementen uit $1, 2, \dots, n$ te trekken. We stoppen dan als in stap 3 de waarde van k gelijk is aan $n - r$. Dit wordt bijvoorbeeld gedaan bij medische proefnemingen. Veronderstel dat we willen testen of een nieuw geneesmiddel het cholesterol verlaagt. Er zijn 1000 proefpersonen, die verdeeld moeten worden in twee groepen van elk 500. De eerste groep (de behandelgroep)

krijgt het geneesmiddel en de tweede (de controlegroep) een placebo. Zowel de deelnemers als de onderzoekers mogen niet weten wie tot welke groep behoort; zo'n test heet *dubbel-blind*. Er moet bepaald worden wie in welke groep terecht komt. Daarvoor worden op willekeurige wijze 500 getallen uit de getallen $1, 2, \dots, 1000$ getrokken en deze personen komen in de behandelgroep.

De acceptatie-verwerping methode

Stel dat we een efficiënte methode hebben om een trekking van een stochastische discrete variabele Y te genereren met massa $\{g_i, i \in I\}$. Dit kunnen we gebruiken voor een trekking van een stochastische variabele X met massa $\{f_i, i \in I\}$ via het volgende algoritme.

1. Bepaal c zodat $\frac{f_i}{g_i} \leq c$ voor alle i .
2. Genereer een trekking van Y , zeg $y = i$.
3. Genereer een random $u \in [0, 1]$.
4. Als $u \leq \frac{f_i}{c \cdot g_i}$: accepteer i als trekking voor X .

Anders: ga naar stap 2.

Stelling 6.2

Bovenstaand algoritme geeft een aselechte trekking uit de kansverdeling van X .

Bewijs

Omdat $\mathbb{P}\{AB\} = \mathbb{P}\{A \mid B\} \cdot \mathbb{P}\{B\} = \mathbb{P}\{B \mid A\} \cdot \mathbb{P}\{A\}$, kunnen we schrijven (neem $Y = i$ voor A en voor B de acceptatie):

$$\mathbb{P}\{Y = i \mid \text{acceptatie}\} \cdot \mathbb{P}\{\text{acceptatie}\} = \mathbb{P}\{\text{acceptatie} \mid Y = i\} \cdot \mathbb{P}\{Y = i\} = \frac{f_i}{c \cdot g_i} \cdot g_i = \frac{f_i}{c}.$$

Sommeer bovenstaande gelijkheid over alle i :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\{Y = i \mid \text{acceptatie}\} \cdot \mathbb{P}\{\text{acceptatie}\} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{c},$$

ofwel $\mathbb{P}\{\text{acceptatie}\} = \frac{1}{c}$. Dit geeft $\mathbb{P}\{X = i\} = \mathbb{P}\{Y = i \mid \text{acceptatie}\} = \frac{f_i/c}{1/c} = f_i$ voor alle i , zodat de aan X toegekende waarde inderdaad overeenkomt met de gewenste massa. $\square$

$\mathbb{P}\{\text{acceptatie}\} = \frac{1}{c}$, d.w.z. dat de toekenning van een waarde voor X te beschouwen is als trekkingen uit een geometrische verdeling met $p = \frac{1}{c}$. De geometrische verdeling heeft $\frac{1}{p} = c$ als verwachting, dus het aantal te verwachten stappen van het algoritme is c : het algoritme werkt sneller naarmate c kleiner is, d.w.z. naarmate $\{g_i, i \in I\}$ meer lijkt op $\{f_i, i \in I\}$, wat logisch is. Tenslotte merken we op dat deze acceptatie-verwerping methode ook kan worden toegepast op continue stochastische variabelen.⁸

Voorbeeld 6.5

Veronderstel dat we een trekking willen doen met waarden $1, 2, \dots, 10$ met kansen $0.13, 0.10, 0.11, 0.06, 0.12, 0.11, 0.08, 0.09, 0.14$ en 0.06 , en dat we daarvoor de uniforme verdeling op

⁸H.C. Tijms: *Operationele analyse: een inleiding in methoden en methoden*, Epsilon Uitgaven, Utrecht, 2002 pp. 435- 437.

$\{1, 2, \dots, 10\}$ willen gebruiken, dus $g_i = \frac{1}{10}$, $1 \leq i \leq 10$. In dit model kunnen we $c = 1.4$ nemen en kan het volgende algoritme worden gebruikt.

1. Genereer een random $u_1 \in [0, 1]$ en laat $y = \lfloor 10u_1 \rfloor + 1$.
 2. Genereer een random $u_2 \in [0, 1]$.
 3. Als $u_2 \leq \frac{f_i}{c \cdot g_i} = \frac{f_i}{1.4 \cdot 0.1} = \frac{f_i}{0.14}$: accepteer y als trekking voor X .
- Anders: ga naar stap 1.

Vraag 6.3

Zij $U_1, U_2, \dots, U_n$ onderling onafhankelijke trekkingen uit de homogene verdeling op $[0, 1]$ en definieer T_n door: $T_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$. Toon aan dat geldt: $\mathbb{E}\{T_n\} = \frac{n}{2}$ en $\text{var}\{T_n\} = \frac{n}{12}$.

Vraag 6.4

Leid formules af om m.b.v. aselechte getallen uit $[0, 1]$ trekkingen te genereren uit verdelingen met de volgende dichtheden $f(x)$:

- a. $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$
- b. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20} & 10 \leq x \leq 30 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$

Vraag 6.5

Gebruik de volgende 12 aselechte getallen uit $[0, 1]$ om een trekking uit een normale verdeling met $\mu = 100$ en $\sigma = 20$ te genereren: 0.485, 0.304, 0.154, 0.707, 0.987, 0.654, 0.996, 0.406, 0.357, 0.612, 0.608 en 40.916.

Vraag 6.6

Beschouw een wachttijdmodel met één bediende. Veronderstel dat er Poissoninput is met $\lambda = 0.2$ minuten en dat de bedieningsduur exponentieel verdeeld is met parameter $\mu = 0.25$ minuten.

Het systeem wordt gedurende 60 minuten geobserveerd.

Maak voor het genereren van aselechte getallen gebruik van Tabel IV.

- a. Bereken analytisch de grootheden L, L_q, W, W_q en ρ .
 - b. Bepaal met de 'gewone' simulatietechniek L, L_q, W, W_q en ρ .
- (iedere klant gebruikt de twee volgende aselechte getallen uit Tabel IV voor de tussentijd resp. de bedieningsduur).

6.5 Variantie reducerende technieken

Een experiment levert een eindig aantal waarnemingen op. Dit zijn realisaties van een stochastische variabele met verwachting μ en variantie σ^2 . Uit de waarnemingen $X_1, X_2, \dots, X_n$ worden μ en σ^2 als volgt benaderd:

1. De verwachting μ : het steekproefgemiddelde $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ is hiervoor een zuivere schatter.
2. De variantie σ^2 : de steekproefvariantie $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ is hiervoor een zuivere schatter.

Het steekproefgemiddelde $\bar{X}_n$ is, zeker als n niet erg groot is, vaak onbetrouwbaar als benadering voor μ . De variantie van $\bar{X}_n$ is dan nog vaak vrij groot zijn (we hebben gezien dat $\text{var}\{\bar{X}_n\} = \frac{\sigma^2}{n}$). Als we nu op de een of andere manier een ander steekproefgemiddelde kunnen vinden, maar met een kleinere variantie, dan verdient dat de voorkeur. Hiervoor zijn diverse technieken beschikbaar, waarvan we er enkele zullen bespreken, zonder echt nieuwe waarnemingen te doen.

6.5.1 Stratificatie

Soms hebben de steekproeven de 'tekortkoming' dat ze onvoldoende representatief zijn, d.w.z. dat bepaalde gebieden van de mogelijke uitkomsten onder- of oververtegenwoordigd zijn. Bij stratificatie gaan we op voorhand uit van een aantal stroken, zeg k , waarin de waarnemingen terecht komen. We nemen aan dat we van iedere strook ('stratum') de kans weten dat een willekeurige waarneming in deze strook terecht komt, zeg p_i is de kans dat een willekeurige waarneming in strook i terecht komt. Als er in totaal n waarnemingen worden gegenereerd, dan moeten er eigenlijk np_i uit strook i komen. We kiezen nu natuurlijke getallen n_i (bij voorkeur ligt n_i enigszins in de buurt van np_i en zorgen er voor dat n_i waarnemingen in strook i vallen, $i = 1, 2, \dots, k$). Als strook i hoort bij random trekkingen uit het deelinterval $[a_i, b_i]$ van $[0, 1]$, dan kan $u \in [0, 1]$ worden vervangen door $u' = a_i + (b_i - a_i)u \in [a_i, b_i]$. Nadat we aldus n_i waarnemingen hebben uit strook i , geven we deze het gewicht $w_i = \frac{np_i}{n_i}$ voor de mate waarin de waarnemingen in de stroken vertegenwoordigd zijn (gewicht 1 is 'eerlijk', kleiner dan 1 hoort bij oververtegenwoordiging en groter dan 1 bij ondervertegenwoordiging).

Intuïtief is duidelijk dat we op deze manier eerlijker te werk gaan. We kunnen inderdaad aantonen dat deze aanpak dezelfde verwachting van het steekproefgemiddelde oplevert en een niet-grotere variantie. Om dit in te zien moeten we ons realiseren dat de gestratificeerde waarnemingen conditionele kansen zijn, waarbij de conditie is dat er uit iedere strook een 'eerlijk' aantal waarnemingen komt. Noem deze conditie Y , dan geldt bovenstaande bewering op grond van de eigenschappen van conditionele verwachting en variantie:⁹

$$\mathbb{E}\{X\} = \mathbb{E}\{\mathbb{E}(X | Y)\} \text{ en } \text{var}\{X\} = \mathbb{E}\{\text{var}(X | Y)\} + \text{var}\{\mathbb{E}(X | Y)\} \geq \text{var}\{\mathbb{E}(X | Y)\}.$$

De verwachting blijft dus hetzelfde, maar de variantie zal in het algemeen kleiner worden.

De gelijkheid $\text{var}\{X\} = \mathbb{E}\{\text{var}(X | Y)\} + \text{var}\{\mathbb{E}(X | Y)\}$ kan als volgt worden verkregen:

⁹S.M. Ross, *A course in Simulation*, Macmillan, 1991 (chapter 2).

$\text{var}\{\mathbb{E}(X|Y)\} = \mathbb{E}\{\{\mathbb{E}(X|Y)\}^2\} - \{\mathbb{E}\{\mathbb{E}(X|Y)\}\}^2 = \mathbb{E}\{\{\mathbb{E}(X|Y)\}^2\} - \{\mathbb{E}(X)\}^2$ en

$\text{var}(X|Y) = \mathbb{E}(X^2|Y) - \{\mathbb{E}(X|Y)\}^2$, zodat we kunnen schrijven:

$$\mathbb{E}\{\text{var}(X|Y)\} = \mathbb{E}\{\mathbb{E}(X^2|Y)\} - \mathbb{E}\{\{\mathbb{E}(X|Y)\}^2\} = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}\{\{\mathbb{E}(X|Y)\}^2\}.$$

Optellen geeft: $\text{var}\{\mathbb{E}(X|Y)\} + \text{var}\{\mathbb{E}(X|Y)\} = \mathbb{E}(X^2) - \{\mathbb{E}(X)\}^2 = \text{var}\{X\}$.

Algoritme 6.2 Stratificatie

1. Verdeel het gebied waar de n waarnemingen in terecht kunnen komen in k stroken.
2. Bepaal p_i = de kans dat een willekeurige waarneming in strook i terecht komt, kies natuurlijke getallen n_i (bij voorkeur $n_i \approx np_i$) en laat $w_i = \frac{np_i}{n_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$.
3. Genereer de waarnemingen en zorg er voor dat er n_i uit strook i komen, $i = 1, 2, \dots, k$.
4. $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k w_i \cdot$ (de som van de waarnemingen uit strook i).

Voorbeeld 6.6

Beschouw de exponentiële verdeling met parameter $\lambda = 1$. Het is bekend dat de verwachting hiervan gelijk aan 1 is, maar veronderstel dat we deze verwachting met simulatie willen benaderen. Zoals in de vorige paragraaf is uitgewerkt kunnen trekkingen uit deze verdeling worden gegenereerd m.b.v. aselechte trekkingen uit $[0, 1]$. Beschouw een steekproef zonder stratificatie van 10 getallen zoals hieronder is getabelleerd.

i	u_i	$x_i = -\ln(1 - u_i)$	i	u_i	$x_i = -\ln(1 - u_i)$
1	0.495	0.684	6	0.698	1.199
2	0.335	0.408	7	0.013	0.014
3	0.791	1.568	8	0.761	1.433
4	0.469	0.623	9	0.290	0.343
5	0.279	0.328	10	0.693	1.183

Deze steekproef heeft als gemiddelde 0.799 en de steekproefvariantie is 0.286.

Vervolgens zullen we de stratificatie techniek toepassen op dit voorbeeld. Als stroken nemen we:

$0 \leq x < 1$, $1 \leq x < 3$ en $x \geq 3$, wat overeenkomt met $p_1 = 0.64$, $p_2 = 0.32$ en $p_3 = 0.04$.

Neem nu $n_1 = 4$, $n_2 = 4$ en $n_3 = 2$, zodat $w_1 = \frac{6.4}{4} = 1.6$, $w_2 = \frac{3.2}{4} = 0.8$ en $w_3 = \frac{0.4}{2} = 0.2$.

In onderstaande tabel staat het schema voor de berekeningen.

strook	i	u_i	u'_i	$x'_i = -\ln(1 - u'_i)$	strook	i	u_i	u'_i	$x'_i = -\ln(1 - u'_i)$
1	1	0.495	0.317	0.381	2	6	0.698	0.864	1.995
1	2	0.335	0.215	0.242	2	7	0.013	0.644	1.033
1	3	0.791	0.507	0.707	2	8	0.761	0.884	2.154
1	4	0.469	0.300	0.357	3	9	0.290	0.972	3.561
2	5	0.279	0.729	1.306	3	10	0.693	0.988	4.398

Dit geeft voor het gestratificeerde steekproefgemiddelde:

$$\{1.6(0.381 + 0.242 + 0.707 + 0.357) + 0.8(1.306 + 1.995 + 1.033 + 2.154) + 0.2(3.561 + 4.398)\}/10 = 0.948.$$

6.5.2 Complementaire aselechte getallen

Een tweede manier om te variantie te reduceren is die van de complementaire aselechte getallen. Als een getal $u \in [0, 1]$ wordt getrokken, dan beschouwen we behalve u ook $u' = 1 - u$. Dit geeft een rij waarnemingen $\{X_i\}$ en een rij $\{X'_i\}$. Intuïtief is ook nu weer duidelijk dat we op deze wijze corrigeren voor 'oneerlijke' trekkingen. Laat $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ en $\bar{X}'_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X'_i$, dan nemen we in dit geval voor het steekproefgemiddelde: $X^* = \frac{\bar{X}_n + \bar{X}'_n}{2}$. Omdat $\mathbb{E}\{\bar{X}_n\} = \mathbb{E}\{\bar{X}'_n\} = \mu$ en $\text{var}\{\bar{X}_n\} = \text{var}\{\bar{X}'_n\} = \frac{\sigma^2}{n}$, en omdat $\bar{X}_n$ en $\bar{X}'_n$ negatief gecorreleerd zijn geldt:

$$\mathbb{E}\{X^*\} = \frac{\mathbb{E}\{\bar{X}_n\} + \mathbb{E}\{\bar{X}'_n\}}{2} = \mu;$$

$$\text{var}\{X^*\} = \frac{1}{4}\{\text{var}\{\bar{X}_n\} + \text{var}\{\bar{X}'_n\} + 2\text{cov}(\bar{X}_n, \bar{X}'_n)\} \leq \frac{1}{4}\{\text{var}\{\bar{X}_n\} + \text{var}\{\bar{X}'_n\}\} = \frac{\sigma^2}{2n}.$$

Voorbeeld 6.6 (vervolg)

De techniek van de complementaire random getallen, toegepast op het voorbeeld, geeft:

i	u_i	$x_i = -\ln(1 - u_i)$	u'_i	$x'_i = -\ln(1 - u'_i)$
1	0.495	0.684	0.505	0.702
2	0.335	0.408	0.665	1.092
3	0.791	1.568	0.209	0.234
4	0.469	0.633	0.531	0.756
5	0.279	0.328	0.721	1.275
6	0.698	1.199	0.302	0.359
7	0.013	0.014	0.978	4.305
8	0.761	1.433	0.239	0.272
9	0.290	0.343	0.710	1.236
10	0.693	1.183	0.307	0.366

$$\bar{X}_n = 0.799; \bar{X}'_n = 1.060, \text{ dus } X^* = (0.779 + 1.060)/2 = 0.920.$$

Voorbeeld 6.7

Veronderstel dat we $\int_0^1 e^x dx$ willen bepalen met simulatie (natuurlijk is de uitkomst $e - 1$, maar het gaat in dit voorbeeld om variantie reductie te tonen). Door heel vaak e^u te nemen met u een random trekking uit de uniform homogene verdeling kunnen we de integraal benaderen.

Voor een trekking U geldt:

$$\text{var}\{e^U\} = \mathbb{E}\{e^{2U}\} - \{\mathbb{E}\{e^U\}\}^2 = \int_0^1 e^{2x} dx - \left\{\int_0^1 e^x dx\right\}^2 = \frac{1}{2}(e^2 - 1) - (e - 1)^2 = 0.2420.$$

Als we twee onafhankelijke trekkingen U_1 en U_2 nemen, dan is de variantie van het gemiddelde:

$$\text{var}\left\{\frac{1}{2}(e^{U_1} + e^{U_2})\right\} = \frac{1}{4}\text{var}\{e^{U_1} + e^{U_2}\} = 0.1210.$$

Als we het gemiddelde van de twee afhankelijke trekkingen U en $1 - U$ nemen, dan is de variantie van het gemiddelde:

$$\text{var}\left\{\frac{1}{2}(e^U + e^{1-U})\right\} = \frac{1}{4}\{\text{var}\{e^U\} + \text{var}\{e^{1-U}\} + 2\text{cov}(e^U, e^{1-U})\}.$$

Omdat $\text{cov}(e^U, e^{1-U}) = \mathbb{E}\{e^U \cdot e^{1-U}\} - \mathbb{E}\{e^U\} \cdot \mathbb{E}\{e^{1-U}\} = e - (e - 1)^2 = -0.2342$, krijgen we:

$$\text{var}\left\{\frac{1}{2}(e^U + e^{1-U})\right\} = \frac{1}{4}\{0.2420 + 0.2420 + 2 \times (-0.2342)\} = 0.0039.$$

Dit geeft dus een enorme variantie reductie.

6.6 Oplossen

Opgave 6.1

Toon aan dat voor $n \geq 2$ geldt:

$$\bar{X}_{n+1} = \bar{X}_n + \frac{X_{n+1} - \bar{X}_n}{n+1} \text{ en } S_{n+1}^2 = (1 - \frac{1}{n})S_n^2 + (n+1)(\bar{X}_{n+1} - \bar{X}_n)^2.$$

Opgave 6.2

Leid formules af om m.b.v. aselechte getallen uit $[0, 1]$ trekkingen te genereren uit verdelingen met de volgende dichtheden $f(x)$:

$$\begin{aligned} \text{a. } f(x) &= \begin{cases} \frac{(x-1)^3}{4} & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \\ \text{b. } f(x) &= \begin{cases} 1+x & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \end{aligned}$$

Opgave 6.3

Beschouw de kansverdeling met dichtheid $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$ en met verdelingsfunctie $F(x)$.

a. Gevraagd wordt om een simulatie experiment te ontwerpen om de verwachting van deze kansverdeling te schatten. Voer daartoe het volgende uit:

(1) gebruik de 'gewone' simulatietechniek met de volgende 10 aselechte getallen uit $[0, 1]$:

0.096, 0.569, 0.665, 0.764, 0.842, 0.492, 0.224, 0.950, 0.610 en 0.145.

(2) Pas de stratificatietechniek toe op de stroken met $0 \leq F(x) < 0.6$, $0.6 \leq F(x) < 0.9$ en $0.9 \leq F(x) \leq 1$, met respectievelijk 3, 3 en 4 waarnemingen.

(3) Gebruik de methode van de complementaire aselechte getallen.

b. Bepaal de verwachting van deze kansverdeling ook analytisch.

Opgave 6.4

Beschouw een voorraadmodel met de volgende gegevens:

- de vraag per maand is normaal verdeeld met $\mu = 100$ en $\sigma = 20$;

- de voorraadkosten zijn 0,25 euro per eenheid die aan het einde van de maand over is;
- de bestelkosten zijn 40 euro per bestelling;
- per tekort zijn er kosten van 1 euro en tekorten worden niet nageleverd.

Onderzoek de volgende twee strategieën:

- a. bestel aan het begin van iedere maand 100 eenheden (deze zijn direct beschikbaar);
- b. bestel aan het begin van iedere vier maanden 400 eenheden (deze zijn direct beschikbaar).

Ga met simulatie na wat de kosten van beide strategieën zijn over een periode van 1 jaar.

Voer voor beide strategieën vier runs uit, gebaseerd op de aselechte getallen van Tabel V.

Opgave 6.5

Beschouw een wachttijdmodel met twee bedienden. Veronderstel dat er Poissoninput is met $\lambda = 0.2$ minuten en dat de bedieningsduur van beide bedienden exponentieel verdeeld is met parameter $\mu = 0.25$ minuten. Het systeem wordt gedurende 60 minuten geobserveerd.

Maak voor het genereren van aselechte getallen gebruik van Tabel IV.

- a. Bereken analytisch de grootheden L, L_q, W, W_q en ρ .
- b. Bepaal met de 'gewone' simulatietechniek L, L_q, W, W_q en ρ .
(iedere klant gebruikt de twee volgende aselechte getallen uit Tabel IV voor de tussentijd resp. de bedieningsduur).

Opgave 6.6

Beschouw het volgende onderhoudsprobleem. Een machine bevat vier identieke onderdelen die stuk kunnen gaan. Als een onderdeel stuk is, dan werkt de machine niet meer.

Vergelijk de volgende strategieën:

- a. als een onderdeel kapot gaat, dan vervangen we dit onderdeel;
- b. als een onderdeel kapot gaat, dan vervangen we alle vier onderdelen.

Gebruik hierbij de volgende gegevens:

(1) de tijd voordat een onderdeel kapot gaat heeft een uniforme verdeling op $[1000, 2000]$

(de eenheid van tijd is 1 uur);

(2) als één onderdeel vervangen moet worden is de machine een uur uitgeschakeld;

als alle onderdelen vervangen worden twee uur;

(3) ieder uur dat de machine is uitgeschakeld betekent een verlies van 100 euro;

(4) vervanging van een onderdeel kost 20 euro;

(5) als aselechte getallen uit $[0, 1]$ kunnen worden genomen:

0.096, 0.569, 0.665, 0.764, 0.842, 0.492, 0.224, 0.950, 0.610, 0.145, 0.484, 0.552, 0.350,

0.590, 0.430, 0.041, 0.802, 0.471, 0.255, 0.799, 0.695, 0.422, 0.400, 0.542 en 0.368.

Startend met vier nieuwe onderdelen, simuleer beide strategieën gedurende 5.000 uur.

Opgave 6.7

De acceptatie-verwerping methode voor een stochastische continue variabele X met dichtheid $f(x)$ m.b.v. een andere continue stochastische variabele Y met dichtheid $g(x)$ gaat als volgt:

1. Bepaal c zodat $\frac{f(x)}{g(x)} \leq c$ voor alle x .
2. Genereer een trekking van Y , zeg y .
3. Genereer een random $u \in [0, 1]$.
4. Als $u \leq \frac{f(y)}{c \cdot g(y)}$: accepteer $x = y$ als trekking voor X .

Anders: ga naar stap 2.

- a. Bewijs dat bovenstaand algoritme een aselechte trekking uit de kansverdeling van X geeft.
 - b. Zij $f(x) = \begin{cases} 20x(1-x)^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$ en beschouw de methode met Y homogeen op $[0, 1]$.
- (1) Bepaal de kleinste c in stap 1.
 - (2) Geef de speciale versie van het algoritme die bij dit voorbeeld en deze c hoort.

Hoofdstuk 7

DYNAMISCHE PROGRAMMERING

7.1 Inleiding

Dynamische programmering is een techniek die vaak met succes toegepast kan worden bij problemen die zich 'in de tijd' afspelen, d.w.z. die een dynamisch karakter hebben. Een algemene karakteristiek van dynamische programmering is dat voor oplossen van het probleem een *recursieve formulering* wordt opgesteld. We hebben dit reeds gezien bij de Bellman-vergelijkingen voor het kortste pad probleem¹ en bij het knapzakprobleem (zie dictaat Besliskunde 3). Het vinden van een dergelijke recursieve formulering vereist een zeker inzicht in het gestelde probleem en een zekere vaardigheid om de recursie op te stellen. Vaak betreft het ook het kunstmatig aanbrengen van een dynamisch karakter in een op het eerste gezicht niet-dynamisch probleem. Door een aantal voorbeelden uit te werken zullen we dit inzicht en deze vaardigheid verder ontwikkelen.

Voorbeeld 7.1

De Flying Doctors beschikt over vijf medische teams die uitgezonden kunnen worden naar drie Derde Wereld landen. De organisatie beoogt de totale effectiviteit van deze vijf teams te optimaliseren, waarbij voor deze effectiviteit de toename van de totale leeftijd, d.w.z. de gemiddelde leeftijd maal het aantal inwoners, wordt genomen. De effectiviteit van de verschillende toewijzingen volgt uit onderstaande tabel.

	effectiviteit in 1000-tallen		
aantal teams	land 1	land 2	land 3
0	0	0	0
1	45	20	50
2	70	45	70
3	90	75	80
4	105	110	100
5	120	150	130

¹Zie Besliskunde 1

Voorbeeld 7.2

Een ruimtevaartorganisatie bereidt een ruimtevlucht voor. Er zijn drie basis-bemanningen die ieder eventueel uitgebreid kunnen worden met top-astronauten. Er zijn twee top-astronauten beschikbaar. De kans dat een vlucht met een bepaalde bemanning mislukt is af te leiden uit de volgende tabel.

aantal toegevoegde top-astronauten	kans op een mislukking		
	team 1	team 2	team 3
0	0.40	0.60	0.80
1	0.20	0.40	0.50
2	0.15	0.20	0.30

De ruimtevlucht is een succes als minstens één team zijn doel bereikt. Als alleen de drie basis-bemanningen worden uitgezonden dan is de kans op succes $1 - (0.40 \times 0.60 \times 0.80) = 0.808$. Aan welke basis-bemanningen kunnen de twee top-astronauten het beste worden toegevoegd om de kans op succes te maximaliseren?

Voorbeeld 7.3

Een beleggingsmaatschappij wil 10 miljoen euro gaan investeren in drie grote lange-termijn projecten. Daarnaast heeft de maatschappij de mogelijkheid om korte termijn investeringen te doen (project 4). Gegevens over kosten en rendement van deze investeringen volgen uit onderstaande tabel (de bedragen zijn in miljoenen euro's).

investerings- niveau	project 1		project 2		project 3		project 4	
	kosten	opbrengst	kosten	opbrengst	kosten	opbrengst	kosten	opbrengst
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1							1	2
2							2	4
3	3	8					3	6
4			4	9			4	8
5	5	13	5	13			5	10
6					6	17	6	12
7	7	18			7	18	7	14
8	8	19	8	18	8	21	8	16
9	9	21	9	19	9	22	9	18
10			10	23	10	24	10	20

Welk investeringsprogramma levert de hoogste winst (d.w.z. opbrengst - kosten) op?

Voorbeeld 7.4

Een bedrijf moet één exemplaar van een bepaald product maken met een uitzonderlijke hoge kwaliteit. Daartoe worden productieruns gedraaid. Na afloop van een productierun kan worden gecontroleerd of de run een exemplaar van de gewenste kwaliteit heeft opgeleverd.

De bedrijfsleider schat de kans dat een willekeurig exemplaar uit een productierun de gewenste kwaliteit oplevert op 50%. Als hij besluit om in een productierun n exemplaren te maken zijn de kosten van deze productierun $300 + 100n$ euro. Er kunnen maximaal 3 runs worden gedraaid. Als na afloop van de derde run nog geen exemplaar van de gewenste kwaliteit is geproduceerd zijn er boetekosten van 1600 euro.

Welke productiestrategie minimaliseert de totale verwachte kosten?

Voorbeeld 7.5

Iemand speelt een spel waarbij hij zijn inzet òfwel kwijtraakt òfwel verdubbelt. De kans op kwijtraken is $\frac{1}{3}$ en op verdubbelen $\frac{2}{3}$. Hij start met 3 fiches, speelt 3 keer en wil uitkomen op 5 fiches. Welke strategie maximaliseert de kans om op 5 fiches uit te komen?

7.2 Terminologie

Problemen die met dynamische programmering opgelost kunnen worden hebben een aantal gemeenschappelijke eigenschappen. Deze worden hieronder besproken.

Meerstapsbeslissingen

Bij dynamische programmering wordt in een bepaald tijdsbestek sequentieel een aantal beslissingen genomen. Aldus wordt het probleem opgesplitst in een aantal stappen en per stap wordt een beslissing genomen.

Toestanden

In iedere stap bevindt het systeem zich in een bepaalde toestand. Deze toestanden moeten vooraf worden gedefinieerd. Daarbij is het aan te bevelen om de toestanden zo te definiëren dat slechts die informatie wordt opgenomen die relevant is voor het probleem en de te nemen beslissing.

Toestandsovergangen

Het gevolg van een beslissing in een bepaalde stap is onder andere dat het systeem zich bij de volgende stap van het beslissingstraject in een, in principe andere, toestand zal bevinden. Deze toestandsovergangen moeten bekend zijn.

Optimaliteitsprincipe

Gegeven de huidige toestand is een optimale strategie voor de resterende stappen onafhankelijk van de beslissingen die in het verleden zijn genomen. Met andere woorden: gegeven de toestand waarin men verkeert, kan men op ieder beslissingstijdstip doen alsof het beslissingsproces juist op dat moment begint.

Recursiviteit

Zij s_n de toestand bij de n -de stap, en laat $X(s_n)$ de mogelijke beslissingen in deze toestand op dit tijdstip zijn. Dan kan een optimale beslissing (verondersteld is dat het om het minimaliseren van kosten gaat; maximaliseren gaat analoog) worden gevonden door het volgende éénstapsbeslissingsprobleem op te lossen:

$$f_n(s_n) = \min_{x_n \in X(s_n)} \{r(s_n, x_n) + f_{n+1}(s_{n+1})\},$$

waarbij $r(s_n, x_n)$ de kosten in de n -de stap zijn, gegeven toestand s_n en beslissing x_n , s_{n+1} de toestand in stap $n + 1$ waarin het systeem vanuit toestand s_n door beslissing x_n overgaat en $f_{n+1}(s_{n+1})$ de optimale kosten vanaf stap $n + 1$ zijn, gegeven toestand s_{n+1} op dat moment.

Bij een N -stapsbeslissingsprobleem, uitgaande van begintoestand s_1 , gaan we als volgt te werk.

Algoritme 7.1 *Dynamische programmering*

1. Bereken $f_N(s_N)$ voor alle mogelijke toestanden s_N met bijbehorende beslissingen $x_N^*(s_N)$.
2. Voor $n = N - 1, N - 2, \dots, 1$ doe:
 Bereken voor alle mogelijke toestanden s_n :

$$f_n(s_n) = \min_{x_n \in X(s_n)} \{r(s_n, x_n) + f_{n+1}(s_{n+1})\},$$
 met bijbehorende optimale beslissing

$$x_n^*(s_n) = \arg \min_{x_n \in X(s_n)} \{r(s_n, x_n) + f_{n+1}(s_{n+1})\}.$$
3. Voor $n = 1, 2, \dots, N$:
 Neem de optimale beslissing $x_n^* = x_n^*(s_n)$ en bepaal s_{n+1} m.b.v. s_n en x_n^* .
4. De optimale strategie is $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*)$ met totale minimale kosten $f_1(s_1)$.

We zullen deze aanpak nader uitwerken voor de in de inleiding gegeven vijf voorbeelden. We maken daarbij onderscheid tussen *deterministische* en *stochastische* modellen. Een model heet deterministisch als de toestand s_{n+1} , gegeven toestand s_n en beslissing x_n , ondubbelzinnig (deterministisch) vastligt; als s_{n+1} d.m.v. een kansverdeling, die in het algemeen afhankelijk is van s_n en x_n , wordt bepaald, dan spreken we van stochastische dynamische programmering.

7.3 Deterministische dynamische programmering

Voorbeeld 7.1 (vervolg)

Zij x_n het aantal teams dat aan land n wordt toegekend en $p_n(x_n)$ de effectiviteit als x_n teams aan land n worden toegekend ($n = 1, 2, 3$).

Het probleem kan dan worden geformuleerd als het volgende optimaliseringsprobleem:

$$\max \left\{ \sum_{n=1}^3 p_n(x_n) \mid \sum_{n=1}^3 x_n \leq 5; x_n \geq 0 \text{ en geheel}, 1 \leq n \leq 3 \right\}.$$

De karakteristieken van dit probleem zijn:

- a) Het aantal stappen is 3, waarbij in stap n wordt bepaald hoeveel aan land n wordt toegekend.
- b) De toestandsverz. is in iedere stap $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, waarbij toestand s_n in stap n het aantal teams is dat nog moet worden toegewezen; $s_1 = 5$.
- c) Toestandsovergangen: $s_{n+1} = s_n - x_n$ als in toestand s_n beslissing x_n wordt genomen.
- d) Het optimaliseringsprobleem in stap n luidt:

$$f_3(s_3) = \max_{0 \leq x_3 \leq s_3} p_3(x_3), \quad s_3 = 0, 1, 2, 3, 4, 5;$$

$$f_n(s_n) = \max_{0 \leq x_n \leq s_n} \{p_n(x_n) + f_{n+1}(s_n - x_n)\}, \quad s_n = 0, 1, 2, 3, 4, 5; n = 2, 1.$$

Hieronder volgen de berekeningen.

$$n = 3 : f_3(s_3) = \max_{0 \leq x_3 \leq s_3} p_3(x_3) = p_3(s_3) \text{ en } x_3^*(s_3) = s_3, \quad 0 \leq s_3 \leq 5.$$

$$n = 2 : f_2(s_2) = \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{p_2(x_2) + f_3(s_2 - x_2)\} = \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{p_2(x_2) + p_3(s_2 - x_2)\}, \quad 0 \leq s_2 \leq 5.$$

	x_2							
s_2	0	1	2	3	4	5	$f_2(s_2)$	$x_2^*(s_2)$
0	0						0	0
1	50	20					50	0
2	70	70	45				70	0
3	80	90	95	75			95	2
4	100	100	115	125	110		125	3
5	130	120	125	145	160	150	160	4

$$n = 1 : f_1(5) = \max_{0 \leq x_1 \leq 5} \{p_1(x_1) + f_2(5 - x_1)\}.$$

	x_1							
s_1	0	1	2	3	4	5	$f_1(s_1)$	$x_1^*(s_1)$
5	160	170	165	160	155	120	170	1

De optimale oplossing is dus:

$$s_1 = 5 \rightarrow x_1^* = 1 \rightarrow s_2 = 4 \rightarrow x_2^* = 3 \rightarrow s_3 = 1 \rightarrow x_3^* = 1 \text{ en heeft waarde } 170.$$

Voorbeeld 7.2 (vervolg)

Zij x_n het aantal top-astronauten dat aan team n wordt toegewezen en zij $p_n(x_n)$ de kans op mislukking van team n als x_n top-astronauten aan team n worden toegewezen ($n = 1, 2, 3$).

Omdat kans op succes = 1 - kans op mislukking van alle 3 teams, kan het probleem worden geformuleerd als:

$$\min \{p_1(x_1) \cdot p_2(x_2) \cdot p_3(x_3) \mid \sum_{n=1}^3 x_n = 2; x_n \geq 0 \text{ en geheel}, 1 \leq n \leq 3\}.$$

De karakteristieken van dit probleem zijn:

- a) Het aantal stappen is 3, waarbij in stap n wordt bepaald hoeveel aan topastronauten aan team n worden toegekend.

- b) De toestandsverz. is in iedere stap $\{0, 1, 2\}$, waarbij toestand s_n in stap n het aantal topastronauten is dat nog moet worden toegewezen; $s_1 = 2$.
- c) Toestandsovergangen: $s_{n+1} = s_n - x_n$ als in toestand s_n beslissing x_n wordt genomen.
- d) Het optimaliseringsprobleem in stap n luidt: $f_3(s_3) = \min_{0 \leq x_3 \leq s_3} p_3(x_3)$, $s_3 = 0, 1, 2$;

$$f_n(s_n) = \min_{0 \leq x_n \leq s_n} \{p_n(x_n) \cdot f_{n+1}(s_n - x_n)\}, \quad s_n = 0, 1, 2; n = 2, 1.$$

De berekeningen zijn in dit geval:

$$n = 3 : f_3(s_3) = \min_{0 \leq x_3 \leq s_3} p_3(x_3) = p_3(s_3) \text{ en } x_3^*(s_3) = s_3, \quad 0 \leq s_3 \leq 2.$$

$$n = 2 : f_2(s_2) = \min_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{p_2(x_2) \cdot f_3(s_2 - x_2)\} = \min_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{p_2(x_2) \cdot p_3(s_2 - x_2)\}, \quad 0 \leq s_2 \leq 2.$$

	x_2				
s_2	0	1	2	$f_2(s_2)$	$x_2^*(s_2)$
0	0.48			0.48	0
1	0.30	0.32		0.30	0
2	0.18	0.20	0.16	0.16	2

$$n = 1 : f_1(2) = \min_{0 \leq x_1 \leq 2} \{p_1(x_1) \cdot f_2(2 - x_1)\}.$$

	x_1				
s_1	0	1	2	$f_1(s_1)$	$x_1^*(s_1)$
2	0.064	0.060	0.072	0.060	1

De optimale oplossing is dus:

$$s_1 = 2 \rightarrow x_1^* = 1 \rightarrow s_2 = 1 \rightarrow x_2^* = 0 \rightarrow s_3 = 1 \rightarrow x_3^* = 1 \text{ en heeft waarde } 0.060.$$

De kans op succes onder de optimale strategie is dus 94%.

Voorbeeld 7.3 (vervolg)

Zij x_n het bedrag dat aan project n wordt toegewezen en zij $w_n(x_n)$ de opbrengst bij toekenning x_n aan project n , $n = 1, 2, 3, 4$.

Analoog aan de vorige voorbeelden krijgen we de volgende berekeningen.

$$n = 4 : f_4(s_4) = \max_{0 \leq x_4 \leq s_4} w_4(x_4) = p_4(s_4) \text{ en } x_4^*(s_4) = s_4, \quad 0 \leq s_4 \leq 10.$$

$$n = 3 : f_3(s_3) = \max_{0 \leq x_3 \leq s_3} \{w_3(x_3) + w_4(s_3 - x_3) \mid x_3 \in \{0, 6, 7, 8, 9, 10\}\}, \quad 0 \leq s_3 \leq 10.$$

	x_3							
s_3	0	6	7	8	9	10	$f_3(s_3)$	$x_3^*(s_3)$
0	0						0	0
1	2						2	0
2	4						4	0
3	6						6	0
4	8						8	0
5	10						10	0
6	12	17					17	6
7	14	19	18				19	6
8	16	21	20	21			21	6
9	18	23	22	23	22		23	6
10	20	25	24	25	24	24	25	6

$$n = 2 : f_2(s_2) = \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{w_2(x_2) +$$

$$f_3(s_2 - x_2) \mid x_2 \in \{0, 4, 5, 8, 9, 10\}, 0 \leq s_2 \leq 10.$$

	x_2							
s_2	0	4	5	8	9	10	$f_2(s_2)$	$x_2^*(s_2)$
0	0						0	0
1	2						2	0
2	4						4	0
3	6						6	0
4	8	9					9	4
5	10	11	13				13	5
6	17	13	15				17	0
7	19	15	17				19	0
8	21	17	19	18			21	0
9	23	19	21	20	19		23	0
10	25	26	23	22	21	23	26	4

$$n = 1 : f_1(10) = \min_{0 \leq x_1 \leq 2} \{w_1(x_1) + f_2(10 - x_1) \mid x_1 \in \{0, 3, 5, 7, 8, 9\}\}.$$

	x_1							
s_1	0	3	5	7	8	9	$f_1(s_1)$	$x_1^*(s_1)$
10	26	27	26	24	23	23	27	3

De optimale oplossing is dus:

$s_1 = 10 \rightarrow x_1^* = 3 \rightarrow s_2 = 7 \rightarrow x_2^* = 0 \rightarrow s_3 = 7 \rightarrow x_3^* = 6 \rightarrow s_4 = 1 \rightarrow x_4^* = 1$ en heeft waarde 27.

Vraag 7.1

Een student heeft 7 weken de tijd voordat de tentamens in 4 vakken beginnen en wil deze tijd zo efficiënt mogelijk besteden. Hij wil aan ieder vak 1, 2, 3 of 4 weken besteden en de keuze zó

maken dat de som van de te verwachten tentamencijfers zo hoog mogelijk is. Het verband tussen het aantal weken besteed aan een vak en het te verwachten cijfer staat in onderstaande tabel.

aantal studieweken	verwachting van het cijfer			
	vak 1	vak 2	vak 3	vak 4
1	3	5	2	6
2	5	5	4	7
3	6	6	7	9
4	7	9	8	9

Hoe zal de student deze 7 weken indelen?

7.4 Stochastische dynamische programmering

Het enige verschil met de vorige paragraaf is dat in plaats van kosten (of opbrengsten) het nu gaat om verwachte kosten (of opbrengsten).

Voorbeeld 7.4 (vervolg)

Zij x_n het aantal exemplaren in run n , $n = 1, 2, 3$. Als toestanden nemen we twee mogelijkheden: een exemplaar van de gewenste kwaliteit is reeds wel ($s = 0$) of reeds niet ($s = 1$) geproduceerd. Als $s = 0$, dan hoeft er niet meer te worden geproduceerd; als $s = 1$ en in run n worden x_n exemplaren gemaakt, dan is de volgende toestand weer $s = 1$ met kans $(\frac{1}{2})^{x_n}$. Laat

$$\begin{aligned}
 p_n(x_n) &= \begin{cases} 0 & \text{als } x_n = 0 \\ 300 + 100x_n & \text{als } x_n \geq 1 \end{cases} \\
 f_n(1) &= \text{minimale verwachte kosten vanaf run } n \text{ in toestand 1.} \\
 &= \min_{x_n \geq 0} \{p_n(x_n) + (\frac{1}{2})^{x_n} f_{n+1}(1)\}, \quad n = 1, 2, 3. \\
 f_4(1) &= 1600.
 \end{aligned}$$

$$n = 3 : f_3(1) = \min_{x_3 \geq 0} \{p_3(x_3) + (\frac{1}{2})^{x_3} \cdot 1600\}.$$

x_3	0	1	2	3	4	5	6	$f_3(1)$	$x_3^*(1)$
	1600	1200	900	800	800	850	925	800	3

$$n = 2 : f_2(1) = \min_{x_2 \geq 0} \{p_2(x_2) + (\frac{1}{2})^{x_2} \cdot f_3(1)\}.$$

x_2	0	1	2	3	4	5	$f_2(1)$	$x_2^*(1)$
	800	800	700	700	750	825	700	2

$$n = 1 : f_1(1) = \min_{x_1 \geq 0} \{p_1(x_1) + (\frac{1}{2})^{x_1} \cdot f_2(1)\}.$$

x_1	0	1	2	3	4	$f_1(1)$	$x_1^*(1)$
	700	750	675	687,50	743,75	675	2

De optimale oplossing is dus: $x_1^* = 2$, $x_2^* = 2$, $x_3^* = 3$ met verwachte kosten 675.

Voorbeeld 7.5 (vervolg)

Zij x_n het aantal fiches dat bij spel n wordt ingezet. Als toestand s_n nemen we het aantal fiches bij het begin van spel n . Laat $f_n(s_n)$ de maximale kans om op 5 fiches uit te komen als we s_n fiches hebben bij het begin van spel n . Dan geldt:

$$f_n(s_n) = \max_{\{x_n | x_n \leq \min\{s_n, 5-s_n\}\}} \left\{ \frac{1}{3} f_{n+1}(s_n - x_n) + \frac{2}{3} f_{n+1}(s_n + x_n) \right\}, \quad n = 3, 2, 1; \quad 0 \leq s_n \leq 5.$$

$$f_4(s_n) = \begin{cases} 1 & \text{als } s_4 = 5 \\ 0 & \text{als } s_4 \neq 5 \end{cases}$$

Dit resulteert in de volgende berekeningen:

$n = 3 :$		x_3						
	s_3	0	1	2	3	4	$f_3(s_3)$	$x_3^*(s_3)$
	0	0					0	0
	1	0	0				0	0
	2	0	0	0			0	0
	3	0	0	$\frac{2}{3}$			$\frac{2}{3}$	2
	4	0	$\frac{2}{3}$				$\frac{2}{3}$	1
	5	1					1	0

$n = 2 :$		x_2						
	s_2	0	1	2	3	4	$f_2(s_2)$	$x_2^*(s_2)$
	0	0					0	0
	1	0	0				0	0
	2	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$			$\frac{4}{9}$	1
	3	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$			$\frac{2}{3}$	0
	4	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$				$\frac{8}{9}$	1
	5	1					1	0

$n = 1 :$		x_1				
	s_1	0	1	2	$f_1(s_1)$	$x_1^*(s_1)$
	3	$\frac{2}{3}$	$\frac{20}{27}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{20}{27}$	1

De optimale strategie is als volgt. Begin met inzet 1. Veronderstel dat dit spel wordt gewonnen, zodat de speler in het bezit is van 4 fiches. Zet nu 1 fiche in, zodat daarna ofwel 5 fiches (kans $\frac{2}{3}$) ofwel 3 fiches in bezit zijn; in het laatste geval 2 fiches inzetten, zodat dan met kans $\frac{2}{9}$ alsnog 5 fiches worden bereikt. Na de eerste keer winst wordt dus met kans $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$ het doel bereikt. Als de eerste keer wordt verloren (dus 2 fiches over), dan moet vervolgens twee keer worden gewonnen; zet eerst 1 fiche in en daarna 2, dus winstkans $\frac{4}{9}$. De kans om met deze strategie het doel te bereiken is dus $\frac{2}{3} \cdot \frac{8}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{27}$.

Vraag 7.2 Beschouw de volgende modificatie van Voorbeeld 7.4: de kans dat een exemplaar de gewenste kwaliteit heeft is $\frac{2}{3}$ en er kunnen maximaal 2 runs worden uitgevoerd. Welke productie-strategie is optimaal en hoe groot is daarbij de kans op een goed exemplaar?

Vraag 7.3 Neem aan dat in Voorbeeld 7.5 gestart wordt met 2 fiches en dat 5 keer mag worden gespeeld. Hoe groot is de kans om op 5 fiches uit te kunnen komen?

7.5 Opgaven

Opgave 7.1 Beschouw een electronisch systeem bestaande uit 4 componenten, die ieder moeten functioneren wil het systeem kunnen werken.

De betrouwbaarheid van het systeem kan worden vergroot door in een of meer componenten parallel eenheden te schakelen. De volgende tabel geeft de betrouwbaarheid van een dergelijke constructie.

aantal parallel eenheden	kans op goed functioneren			
	component 1	component 2	component 3	component 4
1	0.5	0.6	0.7	0.5
2	0.6	0.7	0.8	0.7
3	0.8	0.8	0.9	0.9

De kosten om parallel-eenheden te plaatsen staan hieronder:

aantal parallel eenheden	installatiekosten in euro's			
	component 1	component 2	component 3	component 4
1	100	200	100	200
2	200	400	300	300
3	300	500	400	400

Er is 1.000 euro beschikbaar. Hoeveel parallel-eenheden worden in iedere component geplaatst om de betrouwbaarheid van het systeem te maximaliseren (zonder parallel-eenheid is de betrouwbaarheid van een component 0.4) en hoe groot is de maximale betrouwbaarheid?

Opgave 7.2 Een bedrijf heeft twee elektrische ingenieurs (EI's), twee mechanische ingenieurs (MI's) en een onbeperkt aantal monteurs (M's). Het bedrijf heeft 4 werkzaamheden uit te voeren: A, B, C en D. In de volgende tabel staan voor iedere ploeg die een karwei kan uitvoeren wat de kosten ervan zijn.

Karwei	M's	1 MI	2 MI's	1 EI	2 EI's	1 MI en 1 EI
A	50	49	90	47	51	15
B	200	73	15	100	27	20
C	60	52	24	78	84	100
D	56	22	57	56	80	67

Iedere persoon kan bij hoogstens één werkzaamheid worden ingeschakeld.
Welke planning geeft voor het bedrijf de minste kosten?

Opgave 7.3 Een reisbureau heeft voor een periode van 6 jaar een hotel gepacht in een wintersportcentrum. Met de plaatselijke kolenhandelaar is een contract afgesloten waarin wordt bepaald dat hij elk jaar een vaste hoeveelheid brandstof zal leveren tegen betaling van 30.000 euro per jaar. Verder is overeengekomen dat het reisbureau, in geval van ontevredenheid over de leveranties, aan het eind van elk jaar het contract éénzijdig mag opzeggen.

De kolenhandelaar heeft 3 soorten kolen. Levert de kolenhandelaar gedurende een jaar kolensoort i , dan is zijn winst a_i en de kans op opzegging van het contract p_i , $i = 1, 2, 3$.

De kolenhandelaar vraagt zich af welke kolensoorten hij de komende 6 jaar zal leveren om zijn verwachte winst te maximaliseren. Overige gegevens:

$a_1 = 4.350$, $a_2 = 7.900$, $a_3 = 10.500$; $p_1 = 0.2$, $p_2 = 0.4$, $p_3 = 0.6$.

Opgave 7.4 Een stad verwacht de komende 10 jaar een jaarlijkse groei van de vraag naar elektriciteit. Deze verwachte groei is als volgt.

Jaar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Groei	2	3	1	5	2	3	4	3	2	1

Om aan de stijgende vraag te kunnen voldoen moet de installatie worden uitgebreid. Dit kan jaarlijks gebeuren tot maximaal 5 eenheden tegen de volgende kosten (in miljoen euro's):

Uitbreiding	1	2	3	4	5
Kosten	20	38	55	70	80

Deze uitbreiding moet zó worden gepland dat steeds aan de vraag voldaan kan worden en dat de bijbehorende kosten over de periode van 10 jaar zo laag mogelijk zijn. Bij deze kosten moet een jaarlijkse rente van 10% worden verdisconteerd. Welke planning is optimaal?

Opgave 7.5 (Groepsjagen door de Serengeti Leeuw) Leeuwinnen jagen in groepen, in tegenstelling tot de meeste andere grote katachtigen. Blijkens waarnemingen jagen de leeuwinnen meestal in groepen van twee, maar grotere groepen van zelfs meer dan 6 leeuwinnen komen ook voor. Dit zou indiceren dat hun overlevingskans maximaal is bij groepsgrootte twee.

Kan dit via een Wiskundig model ook begrepen worden? Waarnemingen hebben de volgende gegevens opgeleverd voor het jagen op één van de geliefde prooidieren, namelijk zebra's. Zebra's hebben ongeveer 164 kg eetbare massa. Een volwassen leeuw heeft 6 kg voedsel nodig per dag, en een maaginhoud van 30 kg. Elke jacht kost $1/2$ kg aan energie. Een gevangen prooi wordt gelijkelijk over alle jagers verdeeld. Alles wat diezelfde dag niet door de leeuwinnen wordt opgegeten, wordt door aaseters verschalkt.

De kans om een zebra te vangen hangt van het aantal jagers af. De getallen staan in onderstaande tabel.

Groepsgrootte	Succeskans
n	$p(n)$
1	0,15
2	0,33
3	0,37
4	0,40
5	0,42
≥ 6	0,43

Ga ervan uit dat leeuwinnen elke dag hooguit één keer op jacht gaan. Elke dag staat een leeuw voor de keuze of ze op jacht zal gaan, en zo ja, met hoeveel andere leeuwinnen zij op jacht zal gaan. Gevraagd is nu welke achtereenvolgende groepsgrootten de 30-daagse overlevingskans maximaliseren. Daartoe moet je de volgende vragen beantwoorden.

- Modelleer dit probleem als een dynamisch programmeringsprobleem.
- Programmeer dit in Matlab (of een equivalent pakket) en los het op. Als begintoestand mag je aannemen dat een leeuw een maaginhoud van 5 kg, 10 kg, 20 kg, of 30 kg heeft. Geef de optimale strategie in tabelvorm, en de bijbehorende overlevingskans op dag 1. Hierbij moet je verzameling mogelijke toestanden beperken tot een eindige collectie. Motiveer je keuze.
- Er zal blijken dat groepsgrootte 2 niet optimaal is. Verder analyse lijkt te suggereren dat het te maken heeft met het feit dat de hele roedel een gelijk aandeel in de prooi krijgt en niet alleen de jagers. Stel een roedel bevat 2 tot 12 leeuwinnen. Beargumenteer waarom het in dit geval gunstiger is om in groepjes van twee te gaan jagen.

Opgave 7.6 Knapzakprobleem

Gegeven zijn n objecten $\{1, \dots, n\}$, met volumes $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ en waarden $\{w_1, \dots, w_n\}$. Gevraagd is een deelverzameling van de objecten met een totaal volume van *maximaal* ϕ , die de totale waarde van de gekozen voorwerpen maximaliseert. Dit is een zogenaamd knapzakprobleem, dat met behulp van dynamisch programmeren kan worden opgelost.

De formulering als een DP-probleem zullen we bespreken aan de hand van het volgende voorbeeld:

Voorwerp	1	2	3	4	5
Volume	5	1	3	2	6
Waarde	3	5	6	4	14

Het totaal beschikbare volume is $\phi = 6$. De optimale oplossing zie je natuurlijk direct.

- Wat is de optimale oplossing?

Voor een systematische benadering, laat $W(i, j)$ de maximale waarde zijn, die verkregen kan worden door een knapzak met volume j te vullen met een deelverzameling van de objecten $\{1, \dots, i\}$ (minder dan j mag dus ook), voor $j = 0, 1, \dots, \phi$, $i = 1, \dots, n$. In het voorbeeld geldt $W(i, 0) = 0$, $i = 1, \dots, 5$, $W(1, 1) = 0 = W(1, 2) = \dots = W(1, 4)$,

$W(1, 5) = 3 = W(1, 6) = W(1, 7)$, etc. Leid een recursieve relatie af voor $W(i, j)$ in termen van $W(i - 1, l)$, $l \leq j$.

- b) Formuleer het algemene probleem als een DP probleem, met horizon n en $V_n(j) = W(0, j) = 0$, $j = 0, 1, \dots, n$.
- c) Bereken met behulp van het DP-algoritme de te kiezen objecten in het voorbeeld. Wat is de maximale waarde van de mee te nemen objecten?
- d) Hoe verandert het algoritme als je meerdere (ongelimiteerd aantal) objecten van eenzelfde type mag kiezen?

Hoofdstuk 8

MARKOV BESLISSINGSTHEORIE

8.1 Inleiding

8.1.1 Het model

Bij Markov beslissingsketens hebben we niet te maken met één Markov keten, maar met een aantal Markov ketens. Er moet dan worden beslist welke keten de beste is voor een gegeven optimaliteitscriterium. We beschouwen een discrete Markov keten met perioden $t = 1, 2, \dots$. Formeel is dit model als volgt. $\mathcal{S}$ is een *eindige of aftelbare toestandruimte*. Op ieder beslissingstijdstip t wordt het systeem waargenomen. Als het systeem zich op tijdstip t in toestand i bevindt, dan wordt een actie uit een *actieverzameling* $A(i)$ gekozen. Indien actie $a \in A(i)$ wordt gekozen, dan gebeurt het volgende: er is een *directe opbrengst* $r_i^t(a)$ en met *overgangskans* $p_{ij}^t(a)$ is het systeem op het volgende beslissingstijdstip in toestand j . Als de getallen $r_i^t(a)$ en $p_{ij}^t(a)$ onafhankelijk van t zijn, dan heet het model *stationair*.

Voorbeeld 8.1 Voorraad model met nalevering

Een product moet gedurende een planningsperiode van T weken worden beheerd. Het optimaliseringsprobleem is: welke voorraad strategie minimaliseert de totale verwachte kosten?

Bij het begin van iedere week neemt de manager de voorraad waar en beslist hij hoeveel eenheden er besteld moeten worden. We nemen aan dat de orders direct worden geleverd en dat er een eindige opslagcapaciteit is van B eenheden. We nemen ook aan dat de vraag D_t in week t bekend is voor $t = 0, 1, 2, \dots, T-1$ als onafhankelijke stochastische variabelen die niet-negatieve geheeltallige waarden aannemen. Verder zijn de getallen $p_j(t) := \mathbb{P}\{D_t = j\}$ bekend voor alle $j \in \mathbb{N}_0$ en $t = 0, 2, \dots, T-1$. Als de vraag in een periode groter is dan de voorraad, dan wordt het tekort de volgende periode nageleverd.

Laat i de voorraad zijn aan het begin van week t (tekorten worden gemodelleerd als negatieve voorraad), het aantal bestelde eenheden a en zij $i + a - j$ de voorraad aan het einde van week t , met j de vraag in week t .

Dan hebben we te maken met de volgende kosten, waarbij we noteren $\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \geq 1; \\ 0 & \text{als } x \leq 0. \end{cases}$

bestelkosten: $K_t \cdot \delta(a) + k_t \cdot a$;
 voorraadkosten: $h_t \cdot \delta(j) \cdot j$;
 naleveringskosten: $q_t \cdot \delta(-j) \cdot (-j)$.

De data K_t, k_t, h_t, q_t en $p_j(t)$, $j \in \mathbb{N}$, zijn bekend voor alle $t \in \{0, 1, 2, \dots, T-1\}$.

Als in week t een bestelling wordt gedaan, dan zijn er vaste kosten K_t en kosten k_t voor iedere eenheid die wordt besteld. Als er aan het einde van de week nog een positieve voorraad is, dan zijn er voorraadkosten h_t per eenheid; als er tekorten zijn, dan worden ze nageleverd tegen kosten van q_t per eenheid.

Dit voorraad probleem zullen we modelleren als een niet-stationair probleem over een eindige planningshorizon, met een aftelbare toestandsruimte en met eindige actieverz.:

$S = \{\dots, -1, 0, 1, \dots, B\}$; $A(i) = \{a \geq 0 \mid 0 \leq i + a \leq B\}$;

$$p_{ij}^t(a) = \begin{cases} p_{i+a-j}(t) & j \leq i + a; \\ 0 & B \geq j > i + a; \end{cases}$$

$$r_i^t(a) = -\{K_t \cdot \delta(a) + k_t \cdot a + \sum_{j=0}^{i+a} p_j(t) \cdot h_t \cdot (i + a - j) + \sum_{j=i+a+1}^{\infty} p_j(t) \cdot q_t \cdot (j - i - a)\}.$$

8.1.2 Strategieën

In het vervolg nemen we aan dat de overgangskansen en directe opbrengsten stationair zijn. Dit is vooral om notationele redenen.

Aanname 8.1

De directe opbrengsten en de overgangskansen zijn stationair. We noteren deze met $r_i(a)$ resp. $p_{ij}(a)$ voor alle i, j en a .

Een *strategie* R is een rij beslisregels: $R = (\pi^0, \pi^1, \pi^2, \dots, \pi^t, \dots)$ met π^t de *beslisregel* op tijdstip t , $t = 0, 1, 2, \dots$. Zo'n beslisregel π^t mag afhangen van alle informatie die het systeem tot tijdstip t heeft verkregen, d.w.z. van de toestanden op de tijdstippen $1, 2, \dots, t$ en van de acties op de tijdstippen $1, 2, \dots, t-1$. De formele definitie van beslisregel π^t is als volgt.

Laat $S \times A = \{(i, a) \mid i \in S, a \in A(i)\}$ en laat H_t de verz. zijn van de mogelijke histories van het systeem, d.w.z.

$$H_t = \{(i_0, a_0, i_1, a_1, i_2, a_2, \dots, i_{t-1}, a_{t-1}, i_t) \mid (i_k, a_k) \in S \times A, 0 \leq k \leq t-1; i_t \in S\}.$$

Een beslisregel π^t op tijdstip t geeft de kans, als functie van de historie naar de actieverz., om een bepaalde actie te kiezen:

$$\pi_{h_t a_t}^t \geq 0 \text{ voor alle } a_t \in A(i_t) \text{ en } \sum_{a_t} \pi_{h_t a_t}^t = 1 \text{ voor alle } h_t \in H_t.$$

Zij C de verz. van alle strategieën. Een strategie $R = (\pi^0, \pi^1, \pi^2, \dots)$ heet een *Markov* strategie als de beslisregel π^t onafhankelijk is van $(i_1, a_1, i_2, a_2, \dots, i_{t-1}, a_{t-1})$ voor iedere $t \in \mathbb{N}$: π^t hangt

dus alleen af van de toestand i_t op tijdstip t . Vandaar dat we schrijven $\pi_{i_t a_t}^t$ i.p.v. $\pi_{h_t a_t}^t$. verz. van de Markov strategieën noteren we met $C(M)$.

Indien tevens de lotingskansen gedegenereerd zijn, d.w.z. $\pi_{i_t a_t}^t \in \{0, 1\}$ voor alle i_t en a_t , dan heet de beslisregel *deterministisch*. Zo'n deterministische beslisregel wordt volledig bepaald door de actie die in een toestand met kans 1 wordt gekozen; we noteren een dergelijke beslisregel dan ook met een functie $f_t: \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}$, d.w.z. door de acties $f_t(i)$, $i \in \mathbf{S}$, die met kans 1 worden gekozen. Een strategie met uitsluitend deterministische beslisregels heet een deterministische strategie.

Indien alle beslisregels identiek zijn, dan heet de strategie *stationair*. De verz. van alle stationaire strategieën noteren we met $C(\mathbf{S})$. Een algemene stationaire strategie $R = (\pi, \pi, \dots)$ heeft beslisregels π die alleen afhangen van de toestand i en de actie a , m.a.w. $\pi: \mathbf{S} \times \mathbf{A} \rightarrow [0, 1]$, d.w.z. $\pi_{ia} \geq 0$ voor alle $i \in \mathbf{S}$ en $a \in A(i)$, en $\sum_a \pi_{ia} = 1$ voor alle $i \in \mathbf{S}$. We noteren deze strategie met π^∞ . Een stationaire deterministische strategie wordt volledig bepaald door een functie $f: \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}$, d.w.z. door de acties $f(i)$, $i \in \mathbf{S}$. Vandaar dat we zo'n strategie noteren met f^∞ . De verz. van stationaire deterministische strategieën noteren we met $C(D)$.

Voor een Markov strategie $R = (\pi^0, \pi^1, \dots)$ definiëren we de overgangsmatrix $P(\pi^t)$ en de opbrengstvector $r(\pi^t)$ door

$$\begin{aligned} \{P(\pi^t)\}_{ij} &= \sum_a p_{ij}(a) \pi_{ia}^t \text{ voor iedere } (i, j) \in \mathbf{S} \times \mathbf{S} \text{ en } t \in \mathbb{N}; \\ \{r(\pi^t)\}_i &= \sum_a r_i(a) \pi_{ia}^t \text{ voor iedere } i \in \mathbf{S} \text{ en } t \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Laten de stochastische variabelen X_t en Y_t de toestand en actie op tijdstip t aanduiden en zij $P_{\beta, R}\{X_t = j, Y_t = a\}$ de notatie voor de kans dat op tijdstip t de toestand j en de actie a is, gegeven dat strategie R wordt gebruikt en dat β de beginverdeling is, d.w.z. β_i is de kans dat het systeem start in toestand i . Als $\beta_i = 1$ voor een $i \in \mathbf{S}$, dan schrijven we $P_{i, R}$ in plaats van $P_{\beta, R}$. Voor de corresponderende verwachting schrijven we $E_{\beta, R}$ dan wel $E_{i, R}$. Het lege matrixproduct interpreteren we als de identiteitsmatrix.

Onder de Markov strategie R , is het proces $\{X_t\}_t$ dus een tijds-*inhomogene* Markov keten.

Lemma 8.1

Voor Markov strategie $R = (\pi^0, \pi^1, \dots)$, beginverdeling β en $t \in \mathbb{N}_0$, geldt:

- (1) $P_{\beta, R}\{X_t = j, Y_t = a\} = \sum_i \beta_i \cdot \{P(\pi^0)P(\pi^1) \cdots P(\pi^{t-1})\}_{ij} \cdot \pi_{ja}^t$, $(j, a) \in \mathbf{S} \times \mathbf{A}$;
- (2) $E_{\beta, R}\{r_{X_t}(Y_t)\} = \sum_i \beta_i \cdot \{P(\pi^0)P(\pi^1) \cdots P(\pi^{t-1})r(\pi^t)\}_i$, met $P(\pi^0)P(\pi^1) \cdots P(\pi^{t-1}) = \mathbf{I}$ (de eenheidsmatrix) voor $t = 0$.

Bewijs

Met inductie naar t . Voor $t = 0$, geldt:

$$P_{\beta, R}\{X_t = j, Y_t = a\} = \beta_j \cdot \pi_{ja}^1 = \sum_i \beta_i \cdot \{P(\pi^0)P(\pi^1) \cdots P(\pi^{t-1})\}_{ij} \cdot \pi_{ja}^t$$

en

$$\mathbb{E}_{\beta,R}\{r_{X_t}^t(Y_t)\} = \sum_{i,a} \beta_i \cdot \pi_{ia}^1 r_i^1(a) = \sum_i \beta_i \cdot \{P(\pi^0)P(\pi^1) \cdots P(\pi^{t-1})r(\pi^t)\}_i.$$

Neem aan dat de beweringen zijn aangetoond voor zekere t , dan zullen we laten zien dat ze ook gelden voor $t+1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\beta,R}\{X_{t+1}=j, Y_{t+1}=a\} &= \sum_{k,b} \mathbb{P}_{\beta,R}\{X_t=k, Y_t=b\} \cdot p_{kj}^t(b) \cdot \pi_{ja}^{t+1} \\ &= \sum_{k,b,i} \beta_i \cdot \{P(\pi^0)P(\pi^1) \cdots P(\pi^{t-1})\}_{ik} \cdot \pi_{kb}^t \cdot p_{kj}^t(b) \cdot \pi_{ja}^{t+1} \\ &= \sum_i \beta_i \cdot \sum_k \{P(\pi^0)P(\pi^1) \cdots P(\pi^{t-1})\}_{ik} \cdot \sum_b \pi_{kb}^t \cdot p_{kj}^t(b) \cdot \pi_{ja}^{t+1} \\ &= \sum_i \beta_i \cdot \sum_k \{P(\pi^0)P(\pi^1) \cdots P(\pi^{t-1})\}_{ik} \cdot \{P(\pi^t)\}_{kj} \cdot \pi_{ja}^{t+1} \\ &= \sum_i \beta_i \cdot \{P(\pi^0)P(\pi^1) \cdots P(\pi^t)\}_{ij} \cdot \pi_{ja}^{t+1}. \end{aligned}$$

Verder hebben we

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\beta,R}\{r_{X_{t+1}}^{t+1}(Y_{t+1})\} &= \sum_{j,a} \mathbb{P}_{\beta,R}\{X_{t+1}=j, Y_{t+1}=a\} \cdot r_j^{t+1}(a) \\ &= \sum_{j,a,i} \beta_i \cdot \{P(\pi^0)P(\pi^1) \cdots P(\pi^t)\}_{ij} \cdot \pi_{ja}^{t+1} \cdot r_j^{t+1}(a) \\ &= \sum_i \beta_i \cdot \{P(\pi^0)P(\pi^1) \cdots P(\pi^t)\}_{ij} \cdot \sum_a \pi_{ja}^{t+1} \cdot r_j^{t+1}(a) \\ &= \sum_i \beta_i \cdot \sum_j \{P(\pi^0)P(\pi^1) \cdots P(\pi^t)\}_{ij} \cdot \{r(\pi^{t+1})\}_j \\ &= \sum_i \beta_i \cdot \{P(\pi^0)P(\pi^1) \cdots P(\pi^t)r(\pi^{t+1})\}_i. \end{aligned} \quad \square$$

De volgende stelling laat zien dat voor iedere beginverdeling β , iedere rij strategieën $R_1, R_2, \dots$ en iedere convexe combinatie van de marginale verdelingen van $\mathbb{P}_{\beta,R_k}$, $k \in \mathbb{N}$, er een Markov strategie R_* bestaat met dezelfde marginale verdeling.

Stelling 8.2 *Voor iedere beginverdeling β , iedere rij strategieën $R_1, R_2, \dots$ en iedere rij niet-negatieve reële getallen $p_1, p_2, \dots$ met $\sum_k p_k = 1$, bestaat er een Markov strategie R_* zdd.*

$$\mathbb{P}_{\beta,R_*}\{X_t=j, Y_t=a\} = \sum_k p_k \cdot \mathbb{P}_{\beta,R_k}\{X_t=j, Y_t=a\}, \quad (j,a) \in \mathcal{S} \times \mathcal{A}, \quad t \in \mathbb{N}.$$

Bewijs

Definieer de Markov strategie $R_* = (\pi^1, \pi^2, \dots)$ door

$$\pi_{ja}^t := \frac{\sum_k p_k \cdot \mathbb{P}_{\beta,R_k}\{X_t=j, Y_t=a\}}{\sum_k p_k \cdot \mathbb{P}_{\beta,R_k}\{X_t=j\}}, \quad t \in \mathbb{N}_0, \quad (j,a) \in \mathcal{S} \times \mathcal{A} \quad (8.1.1)$$

(als de noemer 0 is, neem voor π_{ja}^t , $a \in A(j)$ niet-negatieve getallen met $\sum_a \pi_{ja}^t = 1$, $j \in \mathcal{S}$).

Neem $(j,a) \in \mathcal{S} \times \mathcal{A}$. We bewijzen de stelling met inductie naar t . Voor $t=0$ hebben we

$$\mathbb{P}_{\beta,R_*}\{X_0=j\} = \beta_j \quad \text{en} \quad \sum_k p_k \cdot \mathbb{P}_{\beta,R_k}\{X_0=j\} = \beta_j.$$

Als $\beta_j = 0$, dan: $\mathbb{P}_{\beta,R_*}\{X_0=j, Y_0=a\} = \sum_k p_k \cdot \mathbb{P}_{\beta,R_k}\{X_0=j, Y_0=a\} = 0$.

Als $\beta_j \neq 0$, dan volgt uit (8.1.1) dat

$$\begin{aligned} \sum_k p_k \cdot \mathbb{P}_{\beta,R_k}\{X_0=j, Y_0=a\} &= \sum_k p_k \cdot \mathbb{P}_{\beta,R_k}\{X_0=j\} \cdot \pi_{ja}^0 = \beta_j \cdot \pi_{ja}^0 \\ &= \mathbb{P}_{\beta,R_*}\{X_0=j, Y_0=a\}. \end{aligned}$$

Neem aan dat de bewering is aangetoond voor t , dan bewijzen we dat deze ook geldt voor $t+1$.

$$\begin{aligned}
P_{\beta, R_*}\{X_{t+1} = j\} &= \sum_{l,b} P_{\beta, R_*}\{X_t = l, Y_b = b\} \cdot p_{lj}^t(b) \\
&= \sum_{l,b,k} p_k \cdot P_{\beta, R_k}\{X_t = l, Y_b = b\} \cdot p_{lj}^t(b) \\
&= \sum_k p_k \cdot \sum_{l,b} P_{\beta, R_k}\{X_t = l, Y_b = b\} \cdot p_{lj}^t(b) \\
&= \sum_k p_k \cdot P_{\beta, R_k}\{X_{t+1} = j\}.
\end{aligned}$$

Als $P_{\beta, R_*}\{X_{t+1} = j\} = 0$, dan $\sum_k p_k \cdot P_{\beta, R_k}\{X_{t+1} = j\} = 0$, waaruit volgt dat

$$P_{\beta, R_*}\{X_{t+1} = j, Y_{t+1} = a\} = \sum_k p_k \cdot P_{\beta, R_k}\{X_{t+1} = j, Y_{t+1} = a\} = 0.$$

Als $P_{\beta, R_*}\{X_{t+1} = j\} \neq 0$, dan geldt

$$\begin{aligned}
P_{\beta, R_*}\{X_{t+1} = j, Y_{t+1} = a\} &= P_{\beta, R_*}\{X_{t+1} = j\} \cdot \pi_{ja}^{t+1} = \sum_k p_k \cdot P_{\beta, R_k}\{X_{t+1} = j\} \cdot \pi_{ja}^{t+1} \\
&= \sum_k p_k \cdot P_{\beta, R_k}\{X_{t+1} = j\} \cdot \frac{\sum_k p_k \cdot P_{\beta, R_k}\{X_{t+1} = j, Y_{t+1} = a\}}{\sum_k p_k \cdot P_{\beta, R_k}\{X_{t+1} = j\}} \\
&= \sum_k p_k \cdot P_{\beta, R_k}\{X_{t+1} = j, Y_{t+1} = a\}.
\end{aligned}$$

QED

Gevolg 8.3

Voor iedere begintoestand i en iedere strategie R is er een Markov strategie R_* zdd.

$$P_{i, R_*}\{X_t = j, Y_t = a\} = P_{i, R}\{X_t = j, Y_t = a\}, \quad t \in \mathbb{N}_0, \quad (j, a) \in \mathcal{S} \times \mathcal{A},$$

en

$$E_{i, R_*}\{r_{X_t}(Y_t)\} = E_{i, R}\{r_{X_t}(Y_t)\}, \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

Opmerking Als gevolg van deze stelling is het voldoende om ons tot de analyse van Markovstrategieën te beperken.

Vraag 8.1 Auto inruilprobleem Veronderstel dat we iedere maand beslissen of we onze auto houden of dat we deze inruilen tegen een andere auto met een bepaalde leeftijd, waarbij deze leeftijd in maanden wordt uitgedrukt. We nemen aan dat een auto nooit ouder is dan N maanden, dus een auto van N maanden wordt altijd vervangen door een ander. Bovendien nemen we aan dat een auto die i maanden oud is kans p_i heeft om stuk te gaan, wat we modelleren dat de leeftijd van de auto dan overgaat naar N maanden.

Veronderstel dat we de volgende kosten en opbrengsten hebben:

b_i = kosten om een auto van i maanden aan te schaffen;

t_i = inruilwaarde van een auto die i maanden oud is;

c_i = verwachte onderhoudskosten in de komende maand van een auto die i maanden oud is.

Geef de parameters van dit Markov beslissingsprobleem.

Vraag 8.2 *Aantal Markov strategieën*

Zij $N = |S|$ en $m_i = |A(i)|$, $i \in S$.

Wat is het aantal niet-gerandomiseerde Markov strategieën in een eindig horizon model met T perioden?

8.2 Eindige horizon en totale opbrengsten

Dit is een speciaal geval van het dynamische programmeringsprobleem! Dat kun je dus op dezelfde manier oplossen. We hebben alleen niet formeel bewezen dat de dynamische programmeringsalgoritmes inderdaad een optimale strategie genereren. Dat doen we in deze paragraaf, (maar wel voor het stationaire geval!).

Beschouw een Markov beslissingsprobleem over een eindige aantal perioden, zeg T . T noemen we de *horizon* van het probleem. Voor praktijksituaties is het opportuun om ook de mogelijkheid van een ‘eindafrekening’ op het eindtijdstip T mee te modelleren.

Laat q_i de eindopbrengst in toestand $i \in S$ zijn. We maken de volgende aanname.

Aanname 8.2 $r := \max\{\sup_{i \in S, a \in A(i)} |r_i(a)|, \sup_{i \in S} |q_i|\} < \infty$.

Voor een strategie R en begintoestand $i \in S$ wordt de *totale verwachte opbrengst* over de planning horizon gedefinieerd door:

$$\begin{aligned} v_i^T(R) &= \sum_{t=0}^{T-1} \mathbb{E}_{i,R} r_{X_t}(Y_t) + \mathbb{E}_{i,R} q_{X_T} \\ &= \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{j,a} \mathbb{P}_{i,R}\{X_t = j, Y_t = a\} \cdot r_j(a) + \sum_j \mathbb{P}_{i,R}\{X_T = j\} \cdot q_j, \quad i \in S. \end{aligned}$$

Dan geldt, dat $|v^T(R)| \leq (T+1)r$, en de totale verwachte opbrengst is welgedefinieerd en eindig. Zij $v_i^T = \sup_{R \in C} v_i^T(R)$, $i \in S$, of in vectornotatie, $v^T = \sup_{R \in C} v^T(R)$. De vector v^T heet de *waardevector*. Uit Gevolg 8.3, Lemma 8.1 en Aanname 8.2 volgt dat

$$v^T = \sup_{R \in C(M)} v^T(R) \leq (T+1)r,$$

en voor $R = (\pi^0, \pi^1, \dots, \pi^{T-1}) \in C(M)$ kunnen we schrijven

$$v^T(R) = \sum_{t=0}^{T-1} P(\pi^0)P(\pi^1) \cdots P(\pi^{t-1})r(\pi^t) + P(\pi^0)P(\pi^1) \cdots P(\pi^{T-1})q.$$

Een strategie R_* heet een *optimale strategie* als $v^T(R_*) = \sup_{R \in C} v^T(R)$. Het bestaan van een optimale strategie is niet-triviaal: het supremum moet worden aangenomen en ook nog tegelijk voor alle begintoestanden. We zullen aantonen dat er een optimale deterministische Markov strategie $R_* = (f_*^0, f_*^1, \dots, f_*^{T-1})$ bestaat. Dit tonen we in de volgende stelling aan.

Stelling 8.4 Zij $x_i^T = q_i$, $i \in \mathbf{S}$, en laten f_t en x^t voor $t = T-1, T-2, \dots, 0$ voldoen aan:

$$x_i^t = r_i(f_t) + \sum_j p_{ij}(f_t) x_j^{t+1} = \max_{a \in A(i)} \{r_i(a) + \sum_j p_{ij}(a) x_j^{t+1}\}, \quad i \in \mathbf{S}.$$

Dan is $R_* = (f^0, f^1, \dots, f^{T-1})$ een optimale strategie en x^0 is de waardevector.

Bewijs We gebruiken inductie naar T . Zij $R = (\pi^0, \pi^1, \dots, \pi^{T-1})$ een Markovstrategie (dit mag wegens Gevolg 8.3). Laat $T = 1$. Dan geldt

$$\begin{aligned} v_i^T(R) &= \sum_{j,a} \mathbb{P}_{i,R}\{X_0 = j, Y_0 = a\} \cdot r_j(a) + \sum_j \mathbb{P}_{i,R}\{X_1 = j\} \cdot q_j \\ &= \sum_a \{r_i(a) \pi_{ia}^0 + \sum_j p_{ij}(\pi^0) q_j\} \\ &\leq \max_{a \in A(i)} \{r_i(a) + \sum_j p_{ij}(a) q_j\} = x_i^1 = v_i^1(R_*), \quad i \in \mathbf{S}. \end{aligned}$$

Neem aan dat het resultaat is bewezen voor $T = 0, 1, 2, \dots, t$. Neem een toestand i . Definieer de Markov strategie $R' = (\rho^0, \rho^1, \dots, \rho^{t-1})$ door $\rho_{ja}^k = \pi_{ja}^{k+1}$ voor $k = 0, 1, 2, \dots, t$. Uit de inductie aanname volgt dat $v_j^t(R') \leq x_j^1$, $j \in \mathbf{S}$, omdat voor een planning horizon van $t+1$ perioden x^1 hetzelfde is als x^0 in een planning horizon van t perioden. Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} v_i^{t+1}(R) &= \sum_a \pi_{ia}^0 \{r_i(a) + \sum_j p_{ij}(a) v_j^t(R')\} \\ &\leq \sum_a \pi_{ia}^0 \{r_i(a) + \sum_j p_{ij}(a) x_j^1\} \leq \max_a \{r_i(a) + \sum_j p_{ij}(a) x_j^1\} = x_i^0. \end{aligned}$$

Aan de andere kant hebben we:

$$\begin{aligned} x^0 &= r(f^0) + P(f^0)x^1 = r(f^0) + P(f^0)\{r(f^1) + P(f^1)x^2\} \\ &= \dots = \sum_{s=0}^t \{P(f^0)P(f^1) \dots P(f^{s-1})r(f^s)\} + P(f^0)P(f^1) \dots P(f^t)q = v^{t+1}(R_*), \end{aligned}$$

d.w.z. $v^{t+1}(R_*) = x^0 \geq v^{t+1}(R)$, ofwel R_* is een optimale strategie en x^0 is de waardevector. $\square$

Opmerking

De methode werkt dus, beginnend bij het einde van de horizon, van achter naar voren en heet dan ook *achterwaartse recursie*.

Algoritme 8.1 *Bepaling van een optimale Markov strategie voor een eindige horizon probleem*

1. $x = q$.
2. Voor $t = T-1, \dots, 0$:
 - a. Bepaal de deterministische beslisregel f^t zdd.

$$\{r(f^t)\}_i + \{P(f^t)x\}_i = \max_{a \in A(i)} \{r_i(a) + \sum_j p_{ij}(a)x_j\}, \quad i \in \mathbf{S}.$$
 - b. $x := r(f^t) + P(f^t)x$.
3. $R_* = (f^0, f^1, \dots, f^{T-1})$ is een optimale Markov strategie en x is de waardevector.

Voorbeeld 8.2

$S = \{1, 2\}$; $A(1) = A(2) = \{1, 2\}$; $T = 3$; $q_i = 0$, $i = 1, 2$.

$p_{11}(1) = \frac{1}{2}$; $p_{12}(1) = \frac{1}{2}$; $r_1(1) = 1$; $p_{11}(2) = \frac{1}{4}$; $p_{12}(2) = \frac{3}{4}$; $r_1(2) = 0$;

$p_{21}(1) = \frac{2}{3}$; $p_{22}(1) = \frac{1}{3}$; $r_2(1) = 2$; $p_{21}(2) = \frac{1}{3}$; $p_{22}(2) = \frac{2}{3}$; $r_2(2) = 5$.

Start met $x_1^3 = x_2^3 = 0$.

$t = 2 : i = 1 : x_1^2 = \max\{1, 0\} = 1$; $f^2(1) = 1$;

$i = 2 : x_2^2 = \max\{2, 5\} = 5$; $f^2(2) = 2$.

$t = 1 : i = 1 : x_1^1 = \max\{1 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 5, 0 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot 5\} = 4$; $f^1(1) = 1$ (of 2);

$i = 2 : x_2^1 = \max\{2 + \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 5, 5 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 5\} = \frac{26}{3}$; $f^1(2) = 2$.

$t = 0 : i = 1 : x_1^0 = \max\{1 + \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{26}{3}, 0 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{3}{4} \cdot \frac{26}{3}\} = \frac{15}{2}$; $f^0(1) = 2$;

$i = 2 : x_2^0 = \max\{2 + \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot \frac{26}{3}, 5 + \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot \frac{26}{3}\} = \frac{109}{9}$; $f^0(2) = 2$.

Een optimale strategie is dus om altijd actie 2 te kiezen, behalve in de laatste periode in toestand 1 (kies dan actie 1). De waardevector $x^0 = (\frac{15}{2}, \frac{109}{9})$.

Vraag 8.3

Beschouw een gelaagd netwerk, d.w.z. knooppunten $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_p$, waarbij $V_1 = \{1\}$ en $V_p = \{N\}$. De pijlen zijn van het type (i, j) met $i \in V_k$ en $j \in V_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots, p-1$, en de pijl (i, j) heeft de lengte l_{ij} .

Toon aan dat het probleem om een kortste pad van knooppunt 1 naar knooppunt N te vinden kan worden opgelost als een Markov beslissingsprobleem over een eindige horizon.

8.2.1 Onbegrensde opbrengsten

Kosten en/of opbrengsten geassocieerd met wachtrijmodellen zijn vaak onbegrensd in de toestand, bijv. het aantal klanten in de rij. Daarom willen we toestaan dat de opbrengsten onbegrensd in de toestand zijn. Dit kan problemen veroorzaken met welgedefinieerdheid van verwachtingen, en het eindig zijn van suprema. Om dit te ondervangen, is het een gebruikelijke methode om te werken met een grensfunctie. Door dan een transformatietruc toe te passen, kan het Markov beslissingsprobleem herschreven worden tot een probleem dat aan de aannames in de vorige paragraaf voldoet.

Neem aan dat er een functie $M : \mathbf{S} \rightarrow (0, \infty)$ bestaat, en constanten c, r , zó dat

$$\begin{aligned} \sum_j p_{ij}(a) &\leq cM_i, \quad a \in \mathbf{A}(i), i \in \mathbf{S} \\ \sup_{a \in \mathbf{A}(i), i \in \mathbf{S}} \frac{r_i(a)}{M_i} &\leq r \\ \sup_{i \in \mathbf{S}} \frac{q_i}{M_i} &\leq r. \end{aligned} \tag{8.2.1}$$

We passen de volgende transformatie toe. Breid $\mathbf{S}$ uit met een ‘put’ Δ , m.a.w. $\mathbf{S}_\Delta = \mathbf{S} \cup \{\Delta\}$.

Definieer

$$\tilde{p}_{ij}(a) = \begin{cases} \frac{p_{ij}(a)M_j}{cM_i} & a \in \mathbf{A}(i), i, j \in \mathbf{S}, \\ 1 - \frac{\sum_{k \in \mathbf{S}} p_{ik}(a)M_j}{cM_i}, & a \in \mathbf{A}(i), i \in \mathbf{S}, j = \Delta \\ 1, & i = j = \Delta, a \in \mathbf{A}(\Delta), \end{cases}$$

met $\mathbf{A}(\Delta) = \{0\}$. De ‘put’ is nodig, omdat de som van kansen 1 moet zijn. De getransformeerde opbrengsten moeten we wel tijdsafhankelijk definiëren: voor $t \in \{0, \dots, T-1\}$

$$\tilde{r}_i^t(a) = \begin{cases} \frac{c^{t-1}r_i(a)}{M_i}, & a \in \mathbf{A}(i), i \in \mathbf{S}, \\ 0, & a = 0, i = \Delta. \end{cases}$$

Analoog, $\tilde{q}_i^t = q_i c^{t-1}/M_i$, $i \in \mathbf{S}$, en $\tilde{q}_\Delta^T = 0$.

Dit getransformeerde model voldoet aan de aannames van de vorige paragraaf. Voor notationale eenvoud schrijven we π^t voor zowel een beslisregel op tijdstip t in het oorspronkelijke model, als in het getransformeerde model. Dan is gemakkelijk na te gaan voor $\tilde{v}^T(R)$ de totale verwachte opbrengst onder Markov strategie R , dat

$$v_i^T(R) = M_i \tilde{v}_i^T(R), \quad i \in \mathbf{S}.$$

Dus dezelfde strategie is optimaal in beide modellen, en we kunnen de maximale totale verwachte opbrengst in het ongetransformeerde model direct berekenen uit die van het getransformeerde, via bovenstaande relatie. Hieruit volgt direct, dat het resultaat van Stelling 8.4 ook geldt wanneer er een grensfunctie is, zodat aan (8.2.1) wordt voldaan.

8.3 Oneindige horizon en totale opbrengsten

8.3.1 Voorbeelden

Een onderhoudsprobleem

Beschouw een apparaat met n onbetrouwbare componenten, dat wordt onderhouden door één monteur. Iedere component werkt of is stuk. De toestandsruimte zullen we aangeven met een $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, waarbij $x_i = 1$ (component i werkt) of 0 (component i is stuk). Het apparaat werkt alleen in toestand $(1, 1, \dots, 1)$.

De levensduur en de reparatietijden van component i , $1 \leq i \leq n$, zijn exponentieel verdeeld met parameters λ_i resp. μ_i . We merken op dat vanwege de geheugenloosheid van de exponentiële verdeling, de tijd die een werkende component reeds werkt, of de tijd die een kapotte component al in reparatie is niet relevant is voor de toestandsbeschrijving. Er wordt aangenomen dat de monteur op ieder moment kan besluiten aan een andere kapotte component te gaan werken.

Het doel is om een reparatiestrategie voor de monteur te bepalen zdd. de totale verdisconteerde tijd over de oneindige horizon dat het apparaat werkt maximaal is. Dit is een probleem met

continue Markovketens. Er kan worden aangetoond dat de optimale strategie onafhankelijk is van de reparatietijden μ_i , en dat de strategie die altijd een kapotte component kiest met de kleinste λ_i , d.w.z. met de langste verwachte levensduur, optimaal is.

Multi-armed bandit probleem

Het multi-armed bandit probleem is een model waarin op ieder tijdstip steeds aan één van N projecten wordt gewerkt. Ieder van deze projecten heeft weer een eindig aantal toestanden, zeg S_n is de toestandsverz. van project n , zodat de toestandsruimte S het Cartesisch product $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_N$ is.

Iedere toestand $i = (i_1, i_2, \dots, i_N)$ heeft dezelfde actieverz $A = \{1, 2, \dots, N\}$, waarbij actie $n \in A$ betekent dat de komende periode aan project n wordt gewerkt. Als project n wordt gekozen in toestand i - het gekozen project noemen we het actieve project - dan hangen de directe opbrengsten en de overgangswaarschijnlijkheden slechts af van het actieve project en blijven de toestanden van de niet-actieve projecten de komende periode ongewijzigd. Als optimaliteitscriterium worden de totale verwachte verdisconteerde opbrengsten genomen.

Er kan worden aangetoond dat er een optimale strategie is die in toestand $i = (i_1, i_2, \dots, i_N)$ project n kiest, waarbij n voldoet aan $G_n(i_n) = \max_{1 \leq k \leq N} G_k(i_k)$ voor bepaalde indices $G_k(i_k)$. Zo'n strategie heet een *index strategie*. Het is verrassend dat de index $G_k(i_k)$ slechts afhangt van de data van project k en niet van die van de andere projecten, waardoor het multi-armed bandit probleem kan worden opgelost door een serie van N one-armed bandit problemen op te lossen, en deze problemen zijn weer te beschouwen als optimale stopproblemen. Dit is een *decompositie* resultaat, waarmee de dimensionaliteit van het probleem zeer aanzienlijk gereduceerd kan worden.

8.3.2 Aannames en definities

Bij totale opbrengsten over een oneindige horizon kunnen de opbrengsten gaan divergeren, waardoor het begrip *totale verwachte opbrengst over een oneindige horizon* niet goed gedefinieerd is. Daarom zullen we voor dit optimaliteitscriterium werken met de volgende aanname. Ook hier maken we gebruik van een grensfunctie, maar de eisen die hieraan worden opgelegd zijn wat stringenter dan in de vorige paragraaf.

Aanname 8.3 *Er bestaat een toestand $\Delta \in S$, een functie $M : S \rightarrow [1, \infty)$, en constanten $\gamma \in (0, 1)$, $r \geq 0$, zodat*

- $\sup_{a \in A} \frac{|r_i(a)|}{M_i} \leq r$.
- $\sum_{j \neq \Delta} p_{ij}(a) M_j \leq \gamma M_i$, $a \in A(i)$, $i \in S \setminus \{\Delta\}$.
- $A(\Delta) = \{0\}$, $p_{\Delta, \Delta}(0) = 1$, $r_{\Delta}(0) = 0$, $M_{\Delta} = 1$.

Deze aanname heeft de volgende prettige eigenschappen.

Lemma 8.5 • *er bestaat een constante $c > 0$, zo dat voor alle Markov strategieën R geldt dat $P_{i,R}\{\tau_{\Delta} > n\} \leq c\gamma^n$, $i \in S$, $n = 1, \dots$, waarbij $\tau_{\Delta} = \min\{n \geq 1 \mid X_n = \Delta\}$.*

- $E_{i,R} \tau_\Delta = \sum_{n \geq 1} P_{i,R} \{\tau_\Delta \geq n\} \leq \frac{c}{1-\gamma}.$
- $E_{i,R} \sum_{t=1}^{\tau_\Delta-1} |r_{X_t}(Y_t)| \leq \frac{r \cdot c}{1-\gamma} M_i, \quad i \in \mathcal{S}.$

De *totale verwachte opbrengsten*, gegeven begintoestand i en strategie R , wordt genoteerd als $v_i(R)$ en gedefinieerd door

$$v_i(R) = \sum_{t=0}^{\infty} E_{i,R} \{r_{X_t}(Y_t)\} = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{j,a} P_{i,R} \{X_t = j, Y_t = a\} \cdot r_j(a).$$

Onder bovenstaande Aanname 8.3 is $v(R)$ goed gedefinieerd voor alle strategieën R , i.h.b. geldt

$$|v_i(R)| \leq \frac{r \cdot c}{1-\gamma} M_i, \quad i \in \mathcal{S}.$$

De *waardevector* $v = \sup_R v(R)$ is dus goed gedefinieerd. Een *optimale strategie* R_* wordt gedefinieerd door $v(R_*) = v$, mits deze bestaat. We zullen aantonen dat er een optimale stationaire deterministische strategie bestaat.

8.3.3 Optimaliteitsvergelijking via contractie-afbeeldingen

Het bestaan van een grensfunctie maakt het mogelijk om gebruikt te maken van contractiestellingen van een genormeerde ruimte naar zichzelf.

Omdat $v(\Delta) = 0$, is het handig om met de volgende functieruimte te werken.

$$\mathcal{X} = \{x : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R} \mid \sup_i \frac{|x_i|}{M_i} < \infty, \quad x_\Delta = 0\}.$$

Voor Markov beslissingsproblemen zijn de volgende twee afbeeldingen op $\mathcal{X}$ van wezenlijk belang:

$$L_\pi x = r(\pi) + P(\pi)x. \quad (8.3.1)$$

$$(Ux)_i = \max_{a \in A(i)} \left\{ r_i(a) + \alpha \sum_j p_{ij}(a)x_j \right\}, \quad i \in \mathcal{S}. \quad (8.3.2)$$

Zij $f_x(i)$ zdd. $r_i(f_x(i)) + \sum_j p_{ij}(f_x(i))x_j = \max_a \{r_i(a) + \sum_j p_{ij}(a)x_j\}$, $i \in \mathcal{S}$. Dan is $L_{f_x} x = Ux = \max_f L_f x$, waarbij het maximum wordt genomen over alle deterministische beslisregels f . Merk op dat $L_\pi x \in \mathcal{X}$ en $Ux \in \mathcal{X}$. Deze afbeeldingen kun je dus itereren. We schrijven inductief $L_\pi^T x = L_\pi(L_\pi^{T-1} x)$ en $U^T x = U(U^{T-1} x)$, $T \geq 2$. We kunnen hier ook een interpretatie aan hechten. Ten eerste geldt

$$L_\pi^T x = \sum_{n=0}^{T-1} P^n(\pi) r(\pi) + P^T(\pi)x,$$

dit is totale verwachte opbrengst onder de stationaire strategie $\pi^T = (\pi, \dots, \pi)$ over een horizon ter lengte T , met eindopbrengst $q^T = x$ op tijdstip T . Analoog geldt dat $U^T x$ de maximale totale verwachte opbrengst is over een horizon ter lengte T , met eindopbrengst x .

Eigenlijk is het berekenen van $U^T x$ dus niets anders dan Dynamisch Programmeren toepassen op een horizon van lengte T , met eindopbrengst x . Of het toepassen van de *achterwaartse recursie*

Algoritme 8.1 na Stelling 8.4 met $q^T = x$. Op dezelfde manier als in het bewijs van deze stelling, is er dan een optimale strategie $(f_0, f_1, \dots, f_{T-1})$ die als totaal verwachte opbrengst $U^T x$ heeft.

Wegens de keuze van de functieruimte $\mathcal{X}$, kunnen we een norm op $\mathcal{X}$ definiëren:¹

$$\|x\|_M = \sup_i \frac{|x(i)|}{M(i)}.$$

Dan heeft $P(\pi)$ een bijbehorende matrixnorm:

$$\|P(\pi)\|_M = \sup_{\{x \in \mathcal{X} \mid \|x\|_M = 1\}} \|P(\pi)x\|_M = \sup_{i \in S} \frac{\sum_{j \neq \Delta} p_{ij}(\pi)M(j)}{M(i)}.$$

Je kunt een matrixnorm interpreteren als een maximale schalingsfactor: hoe blaast x in norm op, onder het beeld $P(\pi)x$?

Op grond van Aanname 8.3 geldt

$$\|P(\pi)\|_M \leq \gamma < 1,$$

m.a.w. $P(\pi)$ is een contractie-afbeelding op $\mathcal{X}$.

Voor $x, y \in \mathcal{X}$ schrijven we $x \leq y$, als $x_i \leq y_i$, $i \in \mathcal{X}$. We schrijven $x < y$, als $x \leq y$, en $x \neq y$ (d.w.z. er is een $i \in S$ met $x_i < y_i$).

Stelling 8.6 *Laat $x, y \in \mathcal{X}$. Laat $B : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, met B gelijk aan L_π of U . Dan gelden de volgende uitspraken.*

- a) (Monotoniteit) Voor $x, y \in \mathcal{X}$ met $x \leq y$, geldt $Bx \leq By$.
- b) (Contractie) $\|Bx - By\|_M \leq \gamma \|x - y\|_M$, $x, y \in \mathcal{X}$.
- c) (Uniek vast punt) $x^* = \lim_{T \rightarrow \infty} B^T x$ bestaat voor alle $x \in \mathcal{X}$. Het punt x^* is vast punt van B , i.e. $Bx^* = x^*$, en x^* is het unieke vaste punt.
- d) (Convergentie) $\|B^T x - x^*\|_M \leq \gamma^T (1 - \gamma)^{-1} \|Bx - x\|_M$.

Bewijs We bewijzen steeds de eigenschappen voor $B = U$. Voor L_π volgen deze door het probleem met één actie per toestand te bekijken. Laten $x, y \in \mathcal{X}$ gegeven zijn met $x \leq y$. Dan is $Ux = L_{f_x} x$, $Uy = L_{f_y} y$, $L_{f_y} x \leq L_{f_x} x = Ux$, en $L_{f_x} y \leq L_{f_y} y = Uy$.

Bewijs van (a). Voor $i \in S$ geldt

$$(Ux - Uy)_i = (L_{f_x} x)_i - (L_{f_y} y)_i \leq (L_{f_x} x)_i - (L_{f_x} y)_i = \sum_j p_{ij}(f_x)(x - y)_j \leq 0. \quad (8.3.3)$$

Bewijs van (b). We gebruiken (8.3.3), dan

$$(Ux - Uy)_i \leq \sum_j p_{ij}(f_x)(x - y)_j \leq \sum_j p_{ij}(f_x) \|x - y\|_M M_j \leq \gamma \|x - y\|_M \cdot M_i.$$

¹Voor een bewijs zie: J. Stoer and R. Bulirsch: *Introduction to numerical analysis*, Springer, 1980, p.178.

Evenzo, geldt

$$(Uy - Ux)_i \leq \gamma \|x - y\|_M \cdot M_i.$$

Combinatie geeft

$$|Ux - Uy|_i \leq \gamma \|x - y\|_M \cdot M_i,$$

zodat

$$\|Ux - Uy\|_M \leq \gamma \|x - y\|_M.$$

Bewijs van (c). Deze uitspraak is het resultaat van een Vaste-puntstelling voor contractie-afbeeldingen van een volledige metrische ruimte naar zichzelf. Je kunt dit ook direct bewijzen als volgt. Merk op, dat uit **(b)** volgt dat

$$\|U^T x - U^T y\|_M \leq \gamma^T \|x - y\|_M. \quad (8.3.4)$$

Laat $S > T$, dan geldt

$$\begin{aligned} \|U^S x - U^T x\|_M &\leq \gamma^T \|U^{S-T} x - x\|_M \leq \gamma^T \left\| \sum_{k=0}^{S-T-1} (U^{k+1} x - U^k x) \right\|_M \\ &\leq \gamma^T \sum_{k=0}^{S-T-1} \gamma^k \|Ux - x\|_M \\ &\leq \frac{\gamma^T - \gamma^S}{1 - \gamma} \|Ux - x\|_M. \end{aligned} \quad (8.3.5)$$

Met de keuze $T = 0$, geldt dus

$$\|U^S x - x\|_M \leq \frac{1 - \gamma^S}{1 - \gamma} \|Ux - x\|_M,$$

zodat

$$\|U^S x\|_M \leq \|U^S x - x\|_M + \|x\|_M \leq \frac{1}{1 - \gamma} \|Ux - x\|_M + \|x\|_M.$$

$(U^S x)_i$, $S = 1, 2, \dots$ is een begrensde Cauchy-rij (door $M_i(\|Ux - x\|_M + \|x\|_M)$) in $\mathbb{R}$, en deze heeft dus een limiet, zeg x_i^* . Dit geeft een functie $x^* \in \mathcal{X}$.

Met behulp van (8.3.5) volgt dat

$$|(U^S x)_i - (U^T x)_i| \leq \frac{\gamma^T}{1 - \gamma} \|Ux - x\|_M \cdot M_i, \quad i \in \mathbf{S}, S \geq T,$$

dus krijgen we dat

$$|x_i^* - (U^T x)_i| \leq \frac{\gamma^T}{1 - \gamma} \|Ux - x\|_M \cdot M_i, \quad i \in \mathbf{S}, T \geq 0,$$

m.a.w.

$$\|x^* - U^T x\|_M \leq \frac{\gamma^T}{1 - \gamma} \|Ux - x\|_M, \quad T \geq 0. \quad (8.3.6)$$

We concluderen dat $\lim_{T \rightarrow \infty} \|x^* - U^T x\|_M = 0$, dus we hebben niet alleen puntsgewijze van convergentie van $U^T x$ naar x^* , $T \rightarrow \infty$, maar ook in norm.

Dus $\lim_{S \rightarrow \infty} U^S x = x^*$ bestaat in $\mathcal{X}$, voor elke $x \in \mathcal{X}$. Uit (8.3.4) en (8.3.6) volgt dat de limiet dezelfde is voor alle $x \in \mathcal{X}$, zeg we noemen deze weer x^* . Nu geldt voor $T > 1$ dat

$$\begin{aligned} \|Ux^* - x^*\|_M &\leq \|Ux^* - U^T x^*\|_M + \|U^T x^* - x^*\|_M \\ &\leq \|U\|_M \|x^* - U^{T-1} x^*\|_M + \|U^T x^* - x^*\|_M. \end{aligned}$$

De laatste expressie convergeert naar 0, voor $T \rightarrow \infty$. Hieruit volgt dat $\|Ux^* - x^*\|_M = 0$, m.a.w. $Ux^* = x^*$. De uniciteit van het vaste punt is nu gemakkelijk door itereren aan te tonen.

Bewijs van (d). Dit volgt nu uit (8.3.6) omdat x^* het unieke limietpunt is van de rij $x, Ux, U^2x, \dots$ voor alle $x \in \mathcal{X}$. QED

Opmerking 8.1 Laat nu de stationaire strategie π^∞ gegeven zijn, en $r \in \mathcal{X}$ willekeurig. Dan geldt dus dat de unieke oplossing in $\mathcal{X}$ van de vergelijking

$$x = r + P(\pi)x, \tag{8.3.7}$$

oftewel van

$$(\mathbf{I} - P(\pi))x = r$$

wordt gegeven door

$$x = \lim_{T \rightarrow \infty} L_\pi^T r = \sum_{t \geq 0} P^t(\pi)r.$$

Dat impliceert dat op $\mathcal{X}$ de inverse $(\mathbf{I} - P(\pi))^{-1}$ bestaat, en gelijk is aan

$$(\mathbf{I} - P(\pi))_{ij}^{-1} = \sum_{t \geq 0} P_{ij}^t(\pi), \quad i, j \neq \Delta.$$

N.B. voor i of j gelijk aan Δ bestaat de oneindige som niet, maar door de keuze van $\mathcal{X}$ bestaat de inverse wel. Als $\mathbf{S}$ aftelbaar oneindig is, dan kunnen er ook oplossingen van (8.3.7) bestaan buiten de ruimte $\mathcal{X}$!!

Met bovengenoemde stelling kunnen we de volgende resultaten bewijzen, waarbij we de vaste punten van de afbeeldingen U en L_π relateren aan v en $v(\pi^\infty)$.

Stelling 8.7 v is de unieke oplossing in $\mathcal{X}$ van de optimaliteitsvergelijking

$$x_i = \max_{a \in \mathbf{A}(i)} \{r_i(a) + \sum_j p_{ij}(a)x_j\}, \quad i \in \mathbf{S}.$$

De deterministische strategie f^∞ met

$$f(i) \in \operatorname{argmax}_{a \in \mathbf{A}(i)} \{r_i(a) + \sum_j p_{ij}(a)v_j\}, \quad i \in \mathbf{S}, \tag{8.3.8}$$

is optimaal en er geldt dat $v(f^\infty) = v$.

Bewijs

Voor de uniciteit is het voldoende om aan te tonen dat $v = x^*$, met x^* het unieke vaste punt van U in $\mathcal{X}$. We bewijzen de uitspraak eerst voor het geval dat $|A(i)| = 1$, $i \in \mathcal{S}$, d.w.z. er is maar één actie per toestand mogelijk. Het beslissingsproces is dus een Markov keten, met overgangsmatrix P . De directe opbrengst in toestand i wordt genoteerd met r_i . Er geldt dat $Ux^* = r + Px^* = Lx^*$.

Iteratie geeft dat

$$L^T x^* = \sum_{n=0}^{T-1} P^n r + P^T x^*.$$

Dus geldt dat

$$\|x^* - \sum_{n=0}^{T-1} P^n r\|_M = \|P^T x^*\|_M \leq \gamma^T \|x^*\|_M.$$

Dit impliceert dat

$$v = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^T P^n r = x^*.$$

Bekijk nu weer het algemene geval. Zij $R = (\pi^1, \pi^2, \dots)$ een willekeurige Markov strategie. Dan geldt:

$$\begin{aligned} v(R) &= r(\pi^1) + \sum_{t=2}^{\infty} P(\pi^1)P(\pi^2) \cdots P(\pi^{t-1})r(\pi^t) \\ &= r(\pi^1) + P(\pi^1) \sum_{s=1}^{\infty} P(\pi^2)P(\pi^3) \cdots P(\pi^s)r(\pi^{s+1}) \\ &= r(\pi^1) + P(\pi^1)v(R_2) = L_{\pi^1}v(R_2), \end{aligned}$$

waarbij $R_2 = (\pi^2, \pi^3, \dots)$. Uit de monotoniteit van L_{π^1} en de definitie van U volgt:

$$v(R) = L_{\pi^1}v(R_2) \leq L_{\pi^1}v \leq Uv, \quad R \in C(M).$$

Dus $v = \sup_{R \in C(M)} v(R) \leq Uv$.

De monotonie geeft dat $Uv \leq U^2v$, zodat $v \leq U^2v$. Door itereren en de limiet nemen, impliceert dat $v \leq \lim_{T \rightarrow \infty} U^T v = x^*$.

We bewijzen nu dat $x^* \leq v$. Omdat x^* het vaste punt is, geldt er dat

$$(Ux^*)_i = \max_{a \in (i)} \{r_i(a) + \sum_j p_{ij}(a)x_j^*\}, \quad i \in \mathcal{S}.$$

Laat $f^*(i) \in \operatorname{argmax}_{a \in A(i)} \{r_i(a) + \sum_j p_{ij}(a)x_j^*\}$, $i \in \mathcal{S}$, dan geldt

$$Ux^* = L_{f_*}x^*,$$

en x^* is het unieke vaste punt van L_{f_*} in $\mathcal{X}$. Uit het bovenstaande volgt dat $x^* = v(f_*^\infty)$, zodat $x^* \leq v$.

Combinatie levert dat $x^* = v$. Uit bovenstaande volgt ook dat $v = v(f_*^\infty)$, zodat f_* aan (8.3.8) voldoet, en f_*^∞ een optimale strategie is. Omdat f_* willekeurig gekozen was, geldt voor elke beslisregel f die aan (8.3.8) dat f^∞ een optimale strategie is. $\square$

Gevolg 8.8 *De waardevector $v(\pi^\infty)$ is de unieke oplossing in $\mathcal{X}$ van de vergelijking*

$$x = (L_\pi x)_i = r_i(\pi) + \sum_j p_{ij}(\pi)x_j, \quad i \in \mathcal{S}.$$

We gaan nu enkele algoritmes bespreken waarmee de waardevector en een optimale strategie bepaald, of benaderd, kunnen worden.

8.3.4 Strategie verbetering

In de methode van *strategie verbetering* wordt een rij van strategieën $f_1^\infty, f_2^\infty, \dots \in C(D)$ geconstrueerd zdd.

$$v(f_{k+1}^\infty) > v(f_k^\infty) \text{ for } k = 1, 2, \dots$$

Als $\mathcal{S}$ eindig is, is $C(D)$ een eindige verzameling. De methode eindigt in dat geval na eindig veel iteraties met een optimale strategie.

Voor iedere $i \in \mathcal{S}$ en $f^\infty \in C(D)$, definiëren we de actieverzameling $A(i, f)$ door

$$A(i, f) = \{a \in A(i) \mid r_i(a) + \sum_j p_{ij}(a)v_j(f^\infty) > v_i(f^\infty)\}.$$

Het intuïtieve idee van de strategie verbetering methode is dat als actie $f(i)$ wordt vervangen door een actie $a \in A(i, f)$, de resulterende strategie de verdisconteerde opbrengsten verbetert. Daarom heet de actieverzameling $A(i, f)$ de verzameling van *verbeterende acties*. In de volgende stelling wordt de correctheid van dit idee aangetoond.

Stelling 8.9 (1) *Als $A(i, f) = \emptyset$ voor iedere $i \in \mathcal{S}$, dan is f^∞ een optimale strategie.*

(2) *Stel $A(i, f) \neq \emptyset$ voor een $i \in \mathcal{S}$. Laat $g^\infty \in C(D)$ met $g(j) = f(j)$ als $A(j, f) = \emptyset$, en $g(j) \in A(j, f)$ als $A(j, f) \neq \emptyset$, $j \in \mathcal{S}$. Laat $w = L_g v(f^\infty) - v(f^\infty) > 0$. Dan is $v(g^\infty) \geq v(f^\infty) + w$, en g verbetert f strict.*

Bewijs

(1) Omdat $A(i, f) = \emptyset$ voor iedere i , geldt: $L_g v(f^\infty) = r(g) + P(g)v(f^\infty) \leq v(f^\infty)$ voor iedere deterministische beslisregel g . Volgens Stelling 8.6 (monotonie) impliceert dit

$$L_g^2 v(f^\infty) \leq L_g v(f^\infty) \leq v(f^\infty).$$

Itereren geeft dat $L_g^T v(f^\infty) \leq v(f^\infty)$, voor alle $T \geq 0$. Dus geldt

$$v(g^\infty) = \lim_{T \rightarrow \infty} L_g^T v(f^\infty) \leq L_g^T v(f^\infty).$$

(2) Merk op dat $w \in \mathcal{X}$. Dan geldt

$$L_g^2 v(f^\infty) \geq L_g(v(f^\infty) + w) \geq L_g v(f^\infty) \geq v(f^\infty) + w,$$

waarbij we in de eerste twee ongelijkheden de monotonie hebben gebruikt. Met inductie volgt nu dat

$$L_g^T v(f^\infty) \geq v(f^\infty) + w.$$

De limiet $T \rightarrow \infty$ geeft het gewenste resultaat.

QED

Algoritme 8.2 (Strategie Verbetering) 1. Start met een willekeurige $f_0^\infty \in C(D)$.

2. Bereken $v(f_n^\infty)$ als unieke oplossing van het lineaire stelsel $L_{f_n} x = x$.

3. a. Bereken $s_{ia}(f_n) = r_i(a) + \alpha \sum_j p_{ij}(a) v_j(f_n^\infty) - v_i(f_n^\infty)$ voor iedere $(i, a) \in \mathbf{S} \times \mathbf{A}$.

b. Bepaal $A(i, f_n) = \{a \in \mathbf{A}(i) \mid s_{ia}(f_n) > 0\}$ voor iedere $i \in \mathbf{S}$.

4. Als $A(i, f_n) = \emptyset$ voor iedere $i \in \mathbf{S}$: ga naar stap 6.

Anders: kies $f_{n+1} \neq f_n$ met $f_{n+1}(i) = f_n(i)$, als $A(i, f_n) = \emptyset$ en $f_{n+1}(i) \in A(i, f_n)$ als $A(i, f_n) \neq \emptyset$.

5. $n := n + 1$, ga naar stap 2.

6. f_n^∞ is een optimale strategie (STOP).

t:12.2

Lemma 8.10 *Algoritme 8.2 convergeert in de volgende zin:*

- $v(f_n^\infty) \uparrow v$, $n \rightarrow \infty$;
- de rij $\{f_n\}_n$ heeft minstens één limiet punt; elk limietpunt correspondeert met een optimale strategie;
- als $\mathbf{S}$ eindig is, dan convergeert het algoritme in eindig veel stappen.

Proof. Met behulp van een Cantor diagonalisatie argument, volgt dat de rij $\{f_n\}_n$ minstens één limiet punt heeft. Cruciaal in dit argument is dat $A(i)$ eindig is voor alle $i \in \mathbf{S}$. Op grond van Stelling 8.9 (2), volgt dat $v(f_{n+1}^\infty) > v(f_n^\infty)$. Dus is de rij vectoren $\{v(f_n^\infty)\}_n$ een niet-dalende rij, die begrensd is in norm. De rij heeft dus een limiet in $\mathcal{X}$, zeg w .

Laat f_* een limiet punt van de rij $\{f_n\}_n$ zijn, en laat $\{f_{n_k}\}_k$ een deelrij zijn met limiet f_* . Laat $i \in \mathbf{S}$. Dan is er een index k_i , zodat $f^*(i) = f_{n_k}(i)$, voor $k \geq k_i$. Dus geldt voor $k \geq k_i$

$$v_i(f_{n_k}^\infty) = (L_{f_*} v(f_{n_k}^\infty))_i = (U v(f_{n_k}^\infty))_i.$$

Neem de limiet voor $k \rightarrow \infty$, en pas de gedomineerde-convergentiestelling toe. Dan volgt

$$w_i = (L_{f_*} w)_i = (U w)_i,$$

Uit Stelling 8.7 volgt nu dat $w = v$ en f_*^∞ is een optimale strategie.

Convergentie in eindig veel stappen wanneer $\mathcal{S}$ eindig is, volgt uit het feit dat $C(D)$ eindig is. Merk op dat cyklen niet kan voorkomen. QED

Opmerkingen

- In principe is er nog vrijheid in de keuze van f_{n+1} in stap 4. Een gebruikelijke keuze is om f_{n+1} zo te kiezen dat

$$s_{if_{n+1}(i)}(f_n) = \max_a s_{ia}(f_n), \quad i \in \mathcal{S}.$$

Er kan worden aangetoond dat deze versie van het algoritme overeenkomt met het oplossen van de vergelijking $Ux = x$ met de methode van Newton.

- Er kan worden aangetoond dat er een sterke relatie is tussen strategieverbetering en lineaire programmering. In zekere zin zijn ze equivalent:

- (1) ieder strategie-verbeteringsalgoritme is equivalent met een blok-pivoting simplex algoritme (in een blok-pivoting simplex algoritme wordt in iedere iteratie een paar gewone simplexstappen tegelijk gedaan);
- (2) ieder simplex algoritme is equivalent met een speciale versie van strategie verbetering.

Voorbeeld 8.3

$\mathcal{S} = \{1, 2, 3, \Delta\}$, $A(1) = A(2) = A(3) = \{1, 2, 3\}$;

$r_1(1) = 1, r_1(2) = 2, r_1(3) = 3, r_2(1) = 6, r_2(2) = 4, r_2(3) = 5; r_3(1) = 8, r_3(2) = 9, r_3(3) = 7.$

$$\begin{array}{llllll} p_{11}(1) = 1/2; & p_{12}(1) = 0; & p_{13}(1) = 0; & p_{11}(2) = 0; & p_{12}(2) = 1/2; & p_{13}(2) = 0; \\ p_{11}(3) = 0; & p_{12}(3) = 0; & p_{13}(3) = 1/2; & p_{21}(1) = 1/2; & p_{22}(1) = 0; & p_{23}(1) = 0; \\ p_{21}(2) = 0; & p_{22}(2) = 1/2; & p_{23}(2) = 0; & p_{21}(3) = 0; & p_{22}(3) = 0; & p_{23}(3) = 1/2; \\ p_{31}(1) = 1/2; & p_{32}(1) = 0; & p_{33}(1) = 0; & p_{31}(2) = 0; & p_{32}(2) = 1/2; & p_{33}(2) = 0; \\ p_{31}(3) = 0; & p_{32}(3) = 0; & p_{33}(3) = 1/2. \end{array}$$

Start met $f_0(1) = 3, f_0(2) = 2$ en $f_0(3) = 1.$

Iteratie 1

$$\begin{array}{rcl} \begin{array}{rcl} x_1 & - & \frac{1}{2}x_3 = 3 \\ & \frac{1}{2}x_2 & = 4 \\ -\frac{1}{2}x_1 & + & x_3 = 8 \end{array} & \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \text{oplossing: } v(f^\infty) = (28/3, 8, 38/3). \\ s_{11}(f) = -11/3, \quad s_{12}(f) = -10/3, \quad s_{13}(f) = 0. \\ s_{21}(f) = 8/3, \quad s_{22}(f) = 0, \quad s_{23}(f) = 10/3. \\ s_{31}(f) = 0, \quad s_{32}(f) = 1/3, \quad s_{33}(f) = 2/3. \end{array} \right. \end{array}$$

$f_1(1) = f_1(2) = f_1(3) = 3.$

Iteratie 2

$$\begin{array}{rcl} x_1 & - & \frac{1}{2}x_3 = 3 \\ x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ & & \frac{1}{2}x_3 = 7 \end{array} \rightarrow \begin{cases} \text{oplossing: } v(f^\infty) = (10, 12, 14). \\ s_{11}(f) = -4, \ s_{12}(f) = -2, \ s_{13}(f) = 0. \\ s_{21}(f) = -1, \ s_{22}(f) = -2, \ s_{23}(f) = 0. \\ s_{31}(f) = -1, \ s_{32}(f) = 1, \ s_{33}(f) = 0. \end{cases}$$

$f_2(1) = f_2(2) = 3$ en $f_2(3) = 2$.

Iteratie 3

$$\begin{array}{rcl} x_1 & - & \frac{1}{2}x_3 = 3 \\ x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ -\frac{1}{2}x_2 & + & x_3 = 9 \end{array} \rightarrow \begin{cases} \text{oplossing: } v(f^\infty) = (32/3, 38/3, 46/3). \\ s_{11}(f) = -11/3, \ s_{12}(f) = -7/3, \ s_{13}(f) = 0. \\ s_{21}(f) = -4/3, \ s_{22}(f) = -7/3, \ s_{23}(f) = 0. \\ s_{31}(f) = -2, \ s_{32}(f) = 0, \ s_{33}(f) = -2/3. \end{cases}$$

f^∞ met $f(1) = f(2) = 3$ en $f(3) = 2$ is een optimale strategie.

8.3.5 Waarde-iteratie

We hebben boven al gezien dat het oneindige horizonprobleem de limiet is van het eindige horizonprobleem. Je kunt dus de waardevector benaderen met de waardevector van het eindige horizonprobleem. We zullen eerst twee begrippen introduceren.

De vector w is een δ -*approximatie* als $\|v - w\|_M \leq \delta$, $\delta > 0$.

De strategie R is een ϵ -*optimale strategie* als $\|v - v(R)\|_M \leq \epsilon$.

Algoritme 8.3 (Waarde-iteratie) 1. Kies $\epsilon > 0$ en $x^0 \in \mathbb{R}^N$ willekeurig. Laat $n = 1$.

2. a) Bereken $x_i^n = \max_a \{r_i(a) + \sum_j p_{ij}(a)x_j^{n-1}\}$, $i \in \mathcal{S}$.

b) Zij $f_n(i) = \arg\max_a \{r_i(a) + \sum_j p_{ij}(a)x_j^{n-1}\}$, $i \in \mathcal{S}$.

3. Als $\|x^n - x^{n-1}\|_M \leq \frac{\epsilon(1-\gamma)}{2\gamma}$, dan is x^n een $\epsilon/2$ -approximatie en f_n^∞ een ϵ -optimale strategie. STOP.

Anders: $n := n + 1$, ga naar stap 2.

Lemma 8.11 1. Algoritme 8.3 is eindig en correct.

2. Elk limietpunt van de rij $\{f_n\}_n$ is optimaal.

Bewijs Stel dat $\|x^n - x^{n-1}\|_M \leq \frac{\epsilon(1-\gamma)}{2\gamma}$. Volgens Stelling 8.6 (d), met $B = U$, $x = x^{n-1}$, en $x^* = v$, geldt dat

$$\|x^n - v\|_M \leq \frac{\gamma}{1-\gamma} \|x^n - x^{n-1}\|_M, \quad (8.3.9)$$

waarbij we gebruikt hebben dat $x^n = Ux^{n-1}$. Hieruit volgt onmiddellijk dat x^n een $\epsilon/2$ -approximatie is.

Verder volgt uit (8.3.9), dat

$$\|v - v(f_n^\infty)\|_M \leq \|v - x^n\|_M + \|v(f_n^\infty) - x^n\|_M \leq \epsilon/2 + \|v(f_n^\infty) - x^n\|_M. \quad (8.3.10)$$

Merk nu op dat $x^n = L_{f_{x^{n-1}}}x^{n-1} = L_{f_n}x^{n-1} = Ux_{n-1}$. Volgens Stelling 8.6 (d), met $B = L_{f_n}$, geldt

$$\|x^n - v(f_n^\infty)\|_M \leq \frac{\gamma}{1 - \gamma} \|x^n - x^{n-1}\|_M. \quad (8.3.11)$$

Uit (8.3.11) en (8.3.10) volgt dat f_n^∞ een ϵ -optimale strategie is.

De tweede uitspraak volgt analoog aan het bewijs van Lemma 8.10. $\square$

We zullen in deze paragraaf geen toepassingen van dit algoritme bespreken. Die komen in paragraaf 8.6 over het oneindige horizonprobleem met verdisconteerde opbrengsten aan de orde!

8.3.6 Lineaire Programmering

Een derde algoritme om Markov beslissingsproblemen op te lossen, maakt gebruik van Lineaire Programmering. Een voordeel van dit algoritme is, dat extra beperkingen kunnen worden meegemodelleerd.

Het is niet speciaal nodig om aan te nemen dat $\mathcal{S}$ eindig is. Dit doen we in de paragraaf echter wel, omdat in Besliskunde 1/Optimalisering alleen Lineaire Programmering in eindig dimensionale ruimtes wordt behandeld. We nemen in deze paragraaf daarom aan dat $|\mathcal{S}| = N < \infty$.

Alvorens het algoritme te bespreken, moeten we enige begrippen introduceren.

Een vector $w \in \mathbb{R}^N$ heet *superharmonisch* als $w_i \geq r_i(a) + \sum_j p_{ij}(a)w_j$ voor alle paren (i, a) met $i \in \mathcal{S}$ en $a \in \mathcal{A}(i)$.

Stelling 8.12 *De waardevector v is de (componentsgewijs) kleinste superharmonische vector.*

Bewijs Omdat v voldoet aan de optimaliteitsvergelijking geldt dat v superharmonisch is. Veronderstel dat ook w superharmonisch is. Dan geldt voor alle $f^\infty \in C(D)$, dat

$$w \geq r(f) + P(f)w = L_f w.$$

Itereren, geeft voor $n = 1, 2, \dots$, dat

$$w \geq L_f^n w.$$

Dus geldt voor alle $f^\infty \in C(D)$, dat $w \geq \lim_{n \rightarrow \infty} L_f^n w = v(f^\infty)$. Dit impliceert dat

$$w \geq \sup_{f^\infty \in C(D)} v(f^\infty) = v.$$

QED

In de vergelijking voor $i = \Delta$ staan alleen maar nullen. Omdat we toch oplossingen van de lineaire ongelijkheid met Δ -component gelijk aan 0 afdwingen, kunnen we deze component in de lineaire ongelijkheden weglaten. Het volgende resultaat geldt dan. We schrijven nu voor het gemak $\mathcal{S}^- = \mathcal{S} \setminus \{\Delta\}$, en $\mathcal{S}^- \times \mathcal{A} = \{(i, a) \mid i \in \mathcal{S}^-, a \in \mathcal{A}(i)\}$.

Gevolg 8.13 v is de unieke oplossing van het lineaire programmeringsprobleem

$$\min \left\{ \sum_{j \in S^-} \beta_j w_j \mid \sum_{j \in S^-} \{\delta_{ij} - p_{ij}(a)\} w_j \geq r_i(a), \quad (i, a) \in S^- \times A \right\}, \quad (8.3.12)$$

met $\beta_j > 0$ voor alle $j \in S^-$.

Het bijbehorende duale probleem luidt:

$$\max \left\{ \sum_{(i,a) \in S^- \times A} r_i(a) x_i(a) \mid \begin{array}{ll} \sum_{(i,a) \in S^- \times A} \{\delta_{ij} - p_{ij}(a)\} x_i(a) &= \beta_j, \quad j \in S^- \\ x_i(a) &\geq 0, \quad (i, a) \in S^- \times A \end{array} \right\}. \quad (8.3.13)$$

Stelling 8.14

Laat x^* een optimale oplossing zijn van (8.3.13), dan is elke deterministische strategie f_*^∞ met $x_i^*(f_*(i)) > 0$, $i \in S$, goed gedefinieerd en een optimale strategie.

Bewijs Omdat probleem (8.3.12) een eindige optimale oplossing heeft, namelijk v , heeft ook het duale probleem (8.3.13) een eindige optimale oplossing, zeg x^* , en gelden de orthogonaliteitsrelaties van de lineaire programmering, d.w.z.

$$x_i^*(a) \cdot \left\{ \sum_{j \in S^-} \{\delta_{ij} - p_{ij}(a)\} v_j - r_i(a) \right\} = 0, \text{ voor alle } (i, a) \in S^- \times A.$$

Omdat $\sum_a x_j^*(a) = \beta_j + \sum_{i,a} p_{ij}(a) x_i^*(a) \geq \beta_j > 0$ voor alle $j \in S^-$, is er voor elke toestand $j \in S^-$ minstens één actie $a \in A(j)$ met $x_j^*(a) > 0$. Kies nu $f^*(j) \in \{a \in A(j) \mid x_j^*(a) > 0\}$. Dan is f_*^∞ goed gedefinieerd.

Uit $x_i^*(f_*(i)) > 0$, $i \in S$ en de orthogonaliteitsrelaties volgt: $\{I - P(f_*)\}v = r(f_*)$. Uit Stelling 8.7 volgt, dat f_*^∞ optimaal is. $\square$

Algoritme 8.4 Lineaire programmering

1. Neem een vector β met $\beta_j > 0$, $j \in S^-$.
2. Bepaal optimale oplossingen v^* en x^* van het duale paar LP-problemen (8.3.12) en (8.3.13).
3. Neem $f_*^\infty \in C(D)$ zdd. $x_i^*(f_*(i)) > 0$ voor iedere $i \in S^-$.
 v^* is de waardevector v en f_*^∞ is een optimale strategie (STOP).

Voorbeeld 8.4 Laat $S^- = \{1, 2, 3\}$, $A(1) = A(2) = A(3) = \{1, 2, 3\}$;

$r_1(1) = 1, r_1(2) = 2, r_1(3) = 3, r_2(1) = 6, r_2(2) = 4, r_2(3) = 5; r_3(1) = 8, r_3(2) = 9, r_3(3) = 7$.

$$\begin{aligned}
p_{11}(1) &= 1/2; & p_{12}(1) &= 0; & p_{13}(1) &= 0; & p_{11}(2) &= 0; & p_{12}(2) &= 1/2; & p_{13}(2) &= 0; \\
p_{11}(3) &= 0; & p_{12}(3) &= 0; & p_{13}(3) &= 1/2; & p_{21}(1) &= 1/2; & p_{22}(1) &= 0; & p_{23}(1) &= 0; \\
p_{21}(2) &= 0; & p_{22}(2) &= 1/2; & p_{23}(2) &= 0; & p_{21}(3) &= 0; & p_{22}(3) &= 0; & p_{23}(3) &= 1/2; \\
p_{31}(1) &= 1/2; & p_{32}(1) &= 0; & p_{33}(1) &= 0; & p_{31}(2) &= 0; & p_{32}(2) &= 1/2; & p_{33}(2) &= 0; \\
p_{31}(3) &= 0; & p_{32}(3) &= 0; & p_{33}(3) &= 1/2.
\end{aligned}$$

Neem $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \frac{1}{3}$.

Het duale probleem (8.3.13) voor dit voorbeeld wordt:

$$\max x_1(1) + 2x_1(2) + 3x_1(3) + 6x_2(1) + 4x_2(2) + 5x_2(3) + 8x_3(1) + 9x_3(2) + 7x_3(3)$$

onder de voorwaarden

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}x_1(1) + x_1(2) + x_1(3) - \frac{1}{2}x_2(1) - \frac{1}{2}x_3(1) &= \frac{1}{3} \\
-\frac{1}{2}x_1(2) + x_2(1) + \frac{1}{2}x_2(2) + x_2(3) - \frac{1}{2}x_3(2) &= \frac{1}{3} \\
-\frac{1}{2}x_1(3) - \frac{1}{2}x_2(3) + x_3(1) + x_3(2) + \frac{1}{2}x_3(3) &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$x_1(1), x_1(2), x_1(3), x_2(1), x_2(2), x_2(3), x_3(1), x_3(2), x_3(3) \geq 0$$

De optimale oplossing x^* van dit probleem is:

$$x_1^*(1) = 0, x_1^*(2) = 0, x_1^*(3) = \frac{1}{3}; \quad x_2^*(1) = 0, x_2^*(2) = 0, x_2^*(3) = \frac{7}{9}; \quad x_3^*(1) = 0, x_3^*(2) = \frac{8}{9}, x_3^*(3) = 0.$$

Dus de optimale strategie f_*^∞ is: $f_*(1) = 3, f_*(2) = 3$ and $f_*(3) = 2$.

De optimale oplossing van het primale probleem, en tevens de waardevector, is:

$$v_1^* = 32/3, \quad v_2^* = 38/3 \text{ en } v_3^* = 46/3.$$

Opmerking:

Er is een bijectie tussen de toelaatbare oplossingen van het duale LP-probleem (8.3.13) en de verz. $C(S)$ van stationaire strategieën. Voor een $\pi^\infty \in C(S)$ wordt de vector $x(\pi)$ met componenten $x_i^\pi(a)$, $(i, a) \in S \times A$, gedefinieerd door: (zie Opmerking 8.1)

$$x_i^\pi(a) = \left\{ \beta^T \{I - P(\pi)\}^{-1} \right\}_i \cdot \pi_{ia}, \quad (i, a) \in S^- \times A.$$

Omgekeerd, voor een toelaatbare oplossing x van (8.3.13), is de stationaire strategie $\pi^\infty(x)$ met elementen π_{ia}^x door:

$$\pi_{ia}^x = \frac{x_i(a)}{\sum_a x_i(a)}, \quad (i, a) \in S^- \times A.$$

In de volgende paragraaf zullen drie specifieke modellen nader bekijken:

- een kans-maximalisatieprobleem,
- het optimaal-stopprobleem en
- het verdisconteerde-opbrengstenprobleem.

8.4 Kansmaximalisatie: Rood-Zwart Casino

Het kansmaximalisatie probleem behandelen we aan de hand van het rood-zwart-casinomodel.

In het rood-zwart casinomodel gaat een gokker met i euro het casino binnen met het doel op een fortuin van N euro uit te komen. Als hij een spel speelt dan wint hij met kans p en verliest hij met kans $1 - p$. Bij verlies is hij zijn inzet kwijt, bij winst krijgt hij zijn inzet plus eenzelfde bedrag terug. Hoe moet hij spelen om zijn kans om te eindigen met N euro te maximaliseren?

Dit probleem kan gemodelleerd worden als een model met totale verwachte opbrengsten. Het aantal euro's dat de gokker bezit, zijn elementen van de toestandsruimte. In de toestanden 0 en N is het spel uit, en de nieuwe toestand wordt dan de put Δ . Als we als opbrengst altijd 0 nemen, behalve als we in toestand N zijn, dan nemen we de opbrengst 1 , dat komen de totale verwachte opbrengsten overeen met de kans om toestand N te bereiken.

$$v_i(R) = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{j,a} P_{i,R}\{X_t = j, Y_t = a\} \cdot r_j(a) = \sum_{t=1}^{\infty} P_{i,R}\{X_t = N\},$$

d.w.z. de kans om toestand N te bereiken.

De parameters van dit model zijn:

$$\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, N, \Delta\}; A(0) = A(N) = \{0\} = A(\Delta), A(i) = \{1, 2, \dots, \min(i, N-i)\}, 1 \leq i \leq N-1.$$

Voor de opbrengsten geldt $r_i(a) = 0, i \neq N$, en $r_N(0) = 1$. Tenslotte, voor $1 \leq i \leq N-1, a \in A(i)$,

$$p_{ij}(a) = \begin{cases} p, & j = i + a \\ 1 - p, & j = i - a \\ 0, & j \neq i + a, i - a \end{cases},$$

$p_{0\Delta}(0) = p_{N\Delta}(0) = p_{\Delta\Delta}(0) = 1$ en de overige kansen zijn 0 .

Omdat onder iedere strategie toestand N of toestand 0 met kans 1 wordt bereikt, blijkt aan Aanname ?? voldaan te zijn. Om dit in te zien, zullen we een interpretatie geven aan de grensfunctie M voor het geval $\mathcal{S}$ eindig is. De interpretatie berust op het volgende lemma.

Lemma 8.15 *Veronderstel dat $|\mathcal{S}| < \infty$. Definieer de volgende rij vectoren in $\mathcal{X}$: $y_i^1 = 1, i \neq \Delta$, $y_{\Delta}^1 = 0$;*

$$y_i^n = \max_{a \in A(i)} P(a) y_i^{n-1},$$

Dan is aan Aanname 8.3 voldaan d.e.s.d.a.

$$\xi = \max_{i \in \mathcal{S}} y_i^{|\mathcal{S}|+1} < 1. \quad (8.4.1)$$

Als aan één van deze condities voldaan wordt, dan is $M_i' = \sum_{n \geq 1} y_i^n$, met $\gamma = \max_i (M_i' - 1)/M_i'$ een grensfunctie die aan Aanname 8.3 voldoet.

Bewijs Het belangrijkste onderdeel van het bewijs is om aan te tonen dat:

$$\max_{i \in S} y_i^{|S|+1} = 1 \iff \max_i y_i^n = 1, \quad \text{voor all } n \geq 1. \quad (8.4.2)$$

Het bewijs hiervan berust op het feit dat een pijlenpad van toestand i naar Δ (waarbij Δ het eindpunt is) met minstens $|S| + 1$ pijlen, minstens twee keer eenzelfde toestand bezoekt. Dus is er een gereduceerd pijlenpad van hooguit $|S|$ pijlen van i naar Δ .

De rest volgt vrij direct.

QED

Merk op, dat y_i^n kan worden geïnterpreteerd als de ‘maximale kans’ dat het proces nog ‘leeft’, id est, nog niet in de put Δ is beland. De uitspraak $\xi < 1$ is equivalent met de bewering dat de maximale kans dat het proces nog ‘leeft’ na $|S| + 1$ stappen, voor elke begintoestand kleiner dan 1 moet zijn. Dat is niet zo vreemd, want als het proces met kans 1 in Δ komt, dan moet er vanuit elke toestand een pijlenpad ter lengte hooguit $|S| + 1$ naar Δ zijn, voor elke Markov strategie.

Er kan worden aangetoond dat er een optimale strategie is met de volgende structuur:

- als $p > \frac{1}{2}$, dan is *voorzichtig spelen*, d.w.z. altijd 1 inzetten, optimaal;
- als $p = \frac{1}{2}$, dan is iedere strategie optimaal;
- als $p < \frac{1}{2}$, dan is *brutaal spelen*, d.w.z. inzet $\min(i, N - i)$ in toestand i , optimaal.

Het bewijs dat het rood-zwart casino model aan (8.4.1) voldoet, wordt aan de lezer overgelaten (Zie Opgave 8.11). De waardevector v van dit model is voldoet derhalve aan de optimaliteitsvergelijking :

$$\begin{cases} x_i = \max_{a \in A(i)} \{px_{i+a} + (1-p)x_{i-a}\}, 1 \leq i \leq N-1 \\ x_0 = 0; x_N = 1 \end{cases} \quad (8.4.3)$$

Beschouw allereerst de ‘voorzichtige’ speler die steeds 1 gulden inzet. Noem deze strategie f_1 . In het hoofdstuk Markov ketens hebben we gezien dat voor de totale opbrengst $v(f_1^\infty)$ geldt:

- als $p \neq \frac{1}{2}$: $v_i(f_1^\infty) = \frac{1-r^i}{1-r^N}$, $0 \leq i \leq N$, waarbij $r = \frac{1-p}{p}$;
- als $p = \frac{1}{2}$: $v_i(f_1^\infty) = \frac{i}{N}$, $0 \leq i \leq N$.

Stelling 8.16 Als $p = \frac{1}{2}$, dan is iedere strategie optimaal.

Bewijs Zij f^∞ een willekeurige strategie. De unieke oplossing van het stelsel $x = r(f) + P(f)x$, is gelijk aan $x = v(f^\infty)$. I.h.b. geldt dat $v(f^\infty)$ voldoet aan:

$$v_i(f^\infty) = \frac{1}{2}v_{i+f(i)}(f^\infty) + \frac{1}{2}v_{i-f(i)}(f^\infty), \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad v_0(f^\infty) = 0 \text{ en } v_N(f^\infty) = 1.$$

Het is direct in te zien dat $v_i(f^\infty) = \frac{i}{N}$, $0 \leq i \leq N$ hieraan voldoet, zodat $v_i(f^\infty) = \frac{i}{N}$, $0 \leq i \leq N$ voor iedere strategie f^∞ . Omdat $\frac{i}{N}$ onafhankelijk is van f , is iedere strategie dus optimaal. $\square$

Stelling 8.17 Als $p > \frac{1}{2}$, dan is *voorzichtig spelen* optimaal.

Bewijs We laten zien dat $v(f_1^\infty)$ de oplossing van de optimaliteitsvergelijking is, d.w.z. dat

$$v_i(f_1^\infty) \geq r_i(a) + \sum_j p_{ij}(a)v_j(f_1^\infty) = pv_{i+a}(f_1^\infty) + (1-p)v_{i-a}(f_1^\infty), \quad i \in \mathbf{S}, \quad a \in \mathbf{A}(i).$$

Omdat $v_i(f_1^\infty) = \frac{1-r^i}{1-r^N}$, $0 \leq i \leq N$, moeten we dus bewijzen dat

$$1 - r^i \geq p(1 - r^{i+a}) + q(1 - r^{i-a})$$

ofwel

$$-r^i \geq -pr^{i+a} - qr^{i-a},$$

D.w.z. dat we moeten aantonen dat $1 \leq pr^a + qr^{-a}$.

Laat $F(a) = pr^a + qr^{-a}$. Er geldt:

$$F(1) = p\frac{q}{p} + q\frac{p}{q} = q + p = 1.$$

Het is voldoende om aan te tonen dat $F(a+1) \geq F(a)$ voor alle a :

$$\begin{aligned} F(a+1) \geq F(a) &\Leftrightarrow pr^{a+1} + qr^{-a-1} \geq pr^a + qr^{-a} \\ &\Leftrightarrow pr^{2a+2} + q \geq pr^{2a+1} + qr \\ &\Leftrightarrow pr^{2a+1}(r-1) \geq q(r-1) \\ &\Leftrightarrow r^{2a+1} \leq r \Leftrightarrow r \leq 1 \\ &\Leftrightarrow p \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

QED

Opmerking

Er kan ook worden aangetoond (maar op een geheel andere wijze) dat als $p < \frac{1}{2}$ de strategie ‘brutaal’ spelen, d.w.z. het maximale inzetten, optimaal is.

8.5 Optimaal stoppen

Bij een optimaal stopprobleem zijn er in iedere toestand twee acties. De eerste actie is de stopactie en de tweede actie doorgaan. Als wordt gestopt in toestand i , dan is er een laatste uitbetaling van r_i en springt het proces naar de put Δ . Als in toestand i de actie ‘doorgaan’ wordt gekozen, dan zijn er kosten c_i en is p_{ij} de kans dat op het volgende tijdstip de toestand j is. De karakteristieken van dit model zijn:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \{1, 2, \dots, N\} \cup \{\Delta\}; \quad \mathbf{A}(i) = \{1, 2\}, \quad i \neq \Delta, \quad \mathbf{A}(\Delta) = \{0\}; \\ r_i(1) &= r_i, \quad r_i(2) = -c_i, \quad r_\Delta(0) = 0; \\ p_{i\Delta}(1) &= 1; \quad p_{ij}(2) = p_{ij}, \quad i, j \neq \Delta. \end{aligned}$$

Als optimaliteitscriterium worden de totale verwachte opbrengsten beschouwd.

Het probleem voldoet niet aan Aannname 8.3. Immers, onder de strategie die nooit stopt, wordt de put Δ nooit bereikt. Het volgende voorbeeld heeft zelfs de eigenschap dat de totale verwachte opbrengst onder iedere strategie, waarvoor Δ met kans 1 bereikt wordt, eindig is, maar de waardevector is niet eindig.

Voorbeeld 8.5

Beschouw het volgende probleem, waarbij $S = \{1, 2, \Delta\}$, $A(1) = \{1, 2\}$, $A(2) = \{1\}$; $r_1(1) = r_1(2) = r_2(1) = 1$.

$$p_{11}(1) = 1 = 1 - p_{12}(1); p_{11}(2) = 0 = 1 - p_{12}(2) = 1;$$

$$p_{21}(1) = 0, p_{22}(1) = \frac{1}{2} = p_{2\Delta}(1).$$

Het volgt direct, dat $v_2(R) = 2$ voor alle strategieën R .

Neem een rij stationaire strategieën R_n , $n = 1, 2, \dots$, waarbij R_n in toestand 1 actie 1 kiest met kans $1 - \frac{1}{n}$ en actie 2 met kans $\frac{1}{n}$. Dan geldt

$$v_1(R_n) = 1 + (1 - \frac{1}{n})v_1(R_n) + \frac{1}{n}v_2(R_n) = 1 + (1 - \frac{1}{n})v_1(R_n) + \frac{2}{n},$$

zodat $\frac{1}{n}v_1(R_n) = 1 + \frac{2}{n}$, d.w.z. $v_1(R_n) = n + 2$.

Deze waarde is voor iedere n eindig, maar $\sup_n v_1(R_n) = \infty$.

Als we aannemen dat $c_i \geq 0$, $i \neq \Delta$, dan kan bovenstaand probleem zich niet voordoen. Dat kunnen we als volgt beredeneren. De niet-stop matrix P is de overgangsmatrix van een Markovketen op $\{1, \dots, N\}$. Stel, dat de Markovketen m gesloten klassen $R_1, \dots, R_m$ heeft. Laat $i_k = \operatorname{argmax}_{i \in R_k} \{r_i\}$. Dan is stoppen in i_k altijd optimaal, $k = 1, \dots, m$.

Laten we aannemen dat er altijd in $\{i_1, \dots, i_m\}$ gestopt wordt. Toestand Δ wordt dan op zijn laatst bereikt, wanneer er alleen in $\{i_1, \dots, i_m\}$ gestopt wordt. Laat f^∞ de corresponderende strategie zijn. Dan geldt $y_i^n = P_{i, f^\infty}\{X_n \neq \Delta\} = \sum_{j \neq \Delta} p_{ij}^n(f)$. De toestanden $\{1, \dots, N\}$ zijn transiënt in de Markovketen met overgangsmatrix $P(f)$, dus geldt

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{j \neq \Delta} p_{ij}^n(f) < \infty, \quad i \neq \Delta.$$

Dit impliceert dat $\sum_j p_{ij}^n(f) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Dus bestaat er n , zodat $\max_{i \neq \Delta} y_i^n = \sum_j p_{ij}^n(f) < 1$. Volgens relatie (8.4.2) wordt dus aan Aannname 8.3 voldaan.

Omdat stoppen in $\{i_1, \dots, i_m\}$ toch optimaal is, kunnen we ook de niet-stop actie in deze toestanden als mogelijkheid toelaten. Die wordt toch niet gekozen, en het is notationeel wat handiger. Dan is de waardevector v de unieke oplossing van de volgende optimaliteitsvergelijking:

$$w_i = \max\{-c_i + \sum_{j \neq \Delta} p_{ij} w_j, r_i\}, \quad i \neq \Delta,$$

en $w_\Delta = 0$.

Het optimaal-stopprobleem blijkt mooi te analyseren te zijn door herformulering als een LP-probleem. Deze formulering geldt in het algemeen voor problemen die aan Aannname 8.3 voldoen.

Terug naar het optimaal stoppen probleem Voor het optimaal stoppen is de waardevector v de unieke optimale oplossing is van het LP-probleem

$$\min \left\{ \sum_j \beta_j w_j \mid rcrw_i \geq r_i, i \in \mathbf{S}^- \sum_j \{\delta_{ij} - p_{ij}\} w_j \geq -c_i, i \in \mathbf{S}^- \right\},$$

waarbij $\beta_j > 0$, $j \in \mathbf{S}^-$, met $\mathbf{S}^- = \mathbf{S} \setminus \{\Delta\}$. Het duale LP is

$$\max \left\{ \sum_i r_i x_i - \sum_i c_i y_i \mid \begin{array}{l} x_j + \sum_i \{\delta_{ij} - p_{ij}\} y_i = \beta_j, j \in \mathbf{S}^- \\ x_i, y_i \geq 0 \text{ voor alle } i \in \mathbf{S}^- \end{array} \right\}. \quad (8.5.1)$$

Een optimale strategie wordt weer verkregen via het duale LP-probleem (8.5.1), zoals is geformuleerd in onderstaande stelling

Stelling 8.18 1) *De bovenstaande LP-problemen hebben eindige optimale oplossingen, de waardevector v resp. (x^*, y^*) ;*

2) *In toestand i is stoppen optimaal als $x_i^* > 0$; als $x_i^* = 0$, dan is $y_i^* > 0$ en is doorgaan optimaal, $i \in \mathbf{S}^-$.*

Voorbeeld 8.6

$\mathbf{S}^- = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. De opbrengsten bij stoppen zijn: $r_1 = 0$, $r_2 = 2$, $r_3 = 2$, $r_4 = 3$ en $r_5 = 0$. Bij doorgaan zijn er geen kosten (dus $c_i = 0$, $1 \leq i \leq 5$) en zijn de toestanden 1 en 5 absorberend; in toestand i ($2 \leq i \leq 4$) is een kans $\frac{1}{2}$ om naar $i+1$ te gaan en een kans $\frac{1}{2}$ om naar $i-1$ te gaan. Het hierbij behorende duale LP-probleem luidt (neem $\beta_j = \frac{1}{5}$, $1 \leq j \leq 5$):

$$\max \left\{ 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \mid \begin{array}{cccccc} x_1 & & & & & \\ & x_2 & & & & \\ & & x_3 & & & \\ & & & x_4 & & \\ & & & & x_5 & \\ & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_2, y_3, y_4 \end{array} \begin{array}{l} - \frac{1}{2}y_2 \\ + y_2 - \frac{1}{2}y_3 \\ - \frac{1}{2}y_2 + y_3 - \frac{1}{2}y_4 \\ - \frac{1}{2}y_3 + y_4 \\ - \frac{1}{2}y_4 \\ \geq 0 \end{array} \right\}$$

De optimale oplossing van dit probleem is:

$x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = \frac{3}{10}$, $x_3 = 0$, $x_4 = \frac{3}{10}$; $x_5 = \frac{1}{5}$; $y_2 = 0$; $y_3 = \frac{1}{5}$ en $y_4 = 0$. Hieruit volgt de optimale strategie: alleen in toestand 3 gaan we door; in de andere toestanden stoppen we. De verwachte totale opbrengst volgt uit het LP-probleem en is voor de verschillende begintoestanden als volgt: $v_1 = 0$, $v_2 = 2$, $v_3 = 2\frac{1}{2}$, $v_4 = 3$ en $v_5 = 0$.

Laat $\mathbf{S}_0 = \{i \in \mathbf{S}^- \mid r_i \geq -c_i + \sum_j p_{ij}r_j\}$, d.w.z. de toestanden waarin direct stoppen niet slechter is dan over één stap te stoppen. Merk op dat $\mathbf{S}_0$ direct uit de data van het model volgt. Een optimaal stopprobleem heet *monotoon* als $p_{ij} = 0$ voor alle $i \in \mathbf{S}_0$ en alle $j \notin \mathbf{S}_0$.

Stelling 8.19 *Voor een monotoon optimaal stopprobleem geldt dat stoppen op S_0 en doorgaan buiten S_0 optimaal is.*

Bewijs Zij v de waardevector van het optimaal-stopprobleem. Definieer w door

$$w_i = \begin{cases} r_i, & i \in S_0; \\ v_i, & i \notin S_0. \end{cases}$$

De waardevector is de unieke oplossing van de optimaliteitsvergelijking

$$v_i = \max \left\{ r_i, -c_i + \sum_j p_{ij} v_j \right\}, \quad i \in S.$$

Er geldt dus dat $w \leq v$. Verder is w superharmonisch. Immers

- als $i \in S_0$: $w_i = r_i \geq -c_i + \sum_j p_{ij} r_j = -c_i + \sum_{j \in S_0} p_{ij} r_j = -c_i + \sum_{j \in S_0} p_{ij} w_j = -c_i + \sum_j p_{ij} w_j$;
- als $i \notin S_0$: $w_i = v_i \geq -c_i + \sum_j p_{ij} v_j \geq -c_i + \sum_j p_{ij} w_j$.

Ook is duidelijk dat $w_i \geq r_i$, $i \in S$.

Omdat v de kleinste superharmonische vector is, geldt $w = v$, d.w.z. $v_i = r_i$, $i \in S_0$, dus stoppen op S_0 is optimaal. Als $i \notin S_0$, dan geldt: $r_i < -c_i + \sum_j p_{ij} r_j \leq -c_i + \sum_j p_{ij} v_j \leq v_i$: doorgaan buiten S_0 is optimaal. $\square$

Voorbeeld 8.7 (Verkoop je huis voor het hoogste bedrag..)

Iemand wil zijn huis verkopen en krijgt iedere week een bod op zijn huis. Laat p_j de kans zijn op een bod ter grootte j , $0 \leq j \leq N$. We nemen aan dat een bod dat niet onmiddellijk wordt geaccepteerd niet verloren gaat, maar ook later kan worden geaccepteerd. Wachten is echter wel nadelig: indien het huis niet wordt verkocht zijn er wekelijks kosten c .

Wat is een optimale verkoopstrategie?

We modelleren dit probleem als een optimaal-stopprobleem.

Toestand j betekent dat j het hoogste bod tot nu toe is. Het model is als volgt:

$S = \{0, 1, \dots, N, \Delta\}$; $A(i) = \{0, 1\}$, $r_i = i$, $c_i = c$, voor $i \neq \Delta$. Verder geldt:

$$p_{ij} = \begin{cases} 0 & j < i \\ \sum_{k=0}^i p_k & j = i \\ p_j & j > i. \end{cases}$$

We zullen allereerst laten zien dat het probleem monotoon is.

$$\begin{aligned} S_0 &= \{i \in S^- \mid r_i \geq -c_i + \sum_j p_{ij} r_j\} = \{i \in S^- \mid i \geq -c + \sum_{j=i+1}^N p_j \cdot j + \sum_{j=0}^i p_j \cdot i\} \\ &= \{i \in S^- \mid i + c \geq \sum_{j=i+1}^N p_j \cdot j + (1 - \sum_{j=i+1}^N p_j) \cdot i\} = \{i \in S^- \mid c \geq \sum_{j=i+1}^N p_j(j - i)\}. \end{aligned}$$

Merk op dat

$$\sum_{j=i+1}^N p_j(j-i) = p_{i+1} + 2p_{i+2} + \cdots + (N-i)p_N$$

monotoon niet-stijgend is in i .

Zij $i^* = \min\{i \mid c \geq \sum_{j=i+1}^N p_j(j-i)\}$, dan is $\mathcal{S}_0 = \{i \in \mathcal{S}^- \mid i \geq i^*\}$.

Omdat $p_{ij} = 0$, $j < i$, geldt dat het probleem monotoon is. Een optimale strategie is om het eerste bod te accepteren dat minstens waarde i^* heeft.

Merk op dat i^* de interpretatie heeft van de minimale waarde waarvoor de verwachte kosten bij niet-accepteren minstens zo groot zijn als de verwachte extra winst bij wel-accepteren.

Voorbeeld 8.8 Raad het hoogste getal

Eén van de leden van het Duivelsei, genaamd Ted, wil wel eens een wedje leggen en stelt het volgende spel voor. De 50 andere aanwezigen schrijven ieder op een papiertje een willekeurig geheel getal, vouwen dit op een stoppen het in een ton. We nemen voor het gemak aan dat de 50 opgeschreven getallen allemaal verschillend zijn.

Ted gaat trekt één voor één een papiertje uit de ton, opent dit, totdat hij beslist dat het getal dat op het zojuist geopende papiertje staat, het hoogste getal is dat op de 50 papiertjes voor komt. Op dat moment stopt hij met verder papiertjes trekken en openvouwen.

Als Ted gelijk heeft, betalen de 50 anderen hem ieder €2. Als hij niet gelijk heeft, dan betaalt Ted ieder van de aanwezigen €0,75.. Stel dat we dit spel een groot aantal keren op deze wijze achter elkaar spelen. Is dit een gunstige weddenschap voor Ted of niet?

Of de weddenschap gunstig is of niet, hangt af van hoe slim Ted speelt. Wanneer moet hij stoppen om zijn kans te maximaliseren dat hij stopt bij het hoogste getal? Het is duidelijk dat hij niet stopt, als hij al een hoger getal langs heeft zien komen. Daarom zal hij alleen een stopbeslissing nemen, wanneer op het net opgevouwen papiertje het hoogste getal totdantoe staat. We kunnen het probleem nu als volgt modelleren, waarbij we aannemen dat het aantal medespelers N is (i.p.v. een concreet getal 50).

Laat $\mathcal{S} = \{1, \dots, N, \Delta\}$. Het proces is in toestand $i \neq \Delta$ als op het i -de opgevouwen papiertje het hoogste getal totnutoe staat (het is het hoogste getal op de eerste i papiertjes); $A(i) = \{1, 2\}$, waarbij actie 1 correspondeert met het huidige getal tot hoogste van allemaal verklaren en stoppen, en actie 2 correspondeert met doorgaan. Dan geldt voor $i, j \neq \Delta$,

$$p_{ij}(1) = p_{ij} = \begin{cases} \frac{\binom{N}{j}(j-2)!(N-j)!}{\binom{N}{i}(i-1)!(N-i)!} = \frac{i}{j(j-1)}, & j > i, 2 \\ \frac{\binom{N}{2}(N-2)!}{\binom{N}{1}(N-1)!} = \frac{1}{2} & j = 2. \end{cases}$$

Voor r_i nemen we de kans dat op het i -de papiertje het hoogste getal van allemaal staat, gegeven dat het het hoogste was van de eerste i getallen. Dan geldt:

$$r_i = \frac{(N-1)!}{\binom{N}{i}(i-1)!(N-i)!} = \frac{i}{N}.$$

Verder is $c_i = 0$ voor alle i . We krijgen

$$\mathbf{S}_0 = \{i \in \mathbf{S}^- \mid r_i \geq \sum_j p_{ij} r_j\} = \{i \in \mathbf{S}^- \mid 1 \geq \frac{1}{i} + \cdots + \frac{1}{N-1}\}.$$

Omdat de som $\frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} + \cdots + \frac{1}{N-1}$ monotoon dalend is in i , is $\mathbf{S}_0 = \{i \in \mathbf{S}^- \mid i \geq i_*\}$ met $i_* = \min\{i \mid 1 \geq \frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} + \cdots + \frac{1}{N-1}\}$. Omdat $\mathbf{S}_0$ gesloten is (ga dit zelf na) is het probleem monotoon, zodat de optimale strategie kiest voor stoppen zodra een getal dat minstens i_* is, het grootste getal tot nu toe is.

Voor dit model kunnen we ook de waardevector berekenen.

Als $i \geq i_*$: $v_i = r_i = \frac{i}{N}$.

Als $i < i_*$: $v_i = -c_i + \sum_j p_{ij} v_j = \sum_{j=i+1}^N \frac{i}{(j-1)j} \cdot v_j = i \cdot \sum_{j=i+1}^N \frac{1}{(j-1)j} \cdot v_j$.

Voor $2 \leq i \leq i_* - 1$ geldt:

$$\begin{aligned} v_{i-1} &= (i-1) \cdot \sum_{j=i}^N \frac{1}{(j-1)j} \cdot v_j = (i-1) \cdot \left\{ \frac{1}{i(i-1)} v_i + \sum_{j=i+1}^N \frac{1}{(j-1)j} \cdot v_j \right\} \\ &= \frac{1}{i} v_i + \frac{i-1}{i} v_i = v_i. \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2 = \cdots = v_{i_*-1} = (i_*-1) \cdot \sum_{j=i_*}^N \frac{1}{(j-1)j} \cdot v_j \\ &= (i_*-1) \cdot \sum_{j=i_*}^N \frac{1}{(j-1)j} \cdot \frac{j}{N} = \frac{i_*-1}{N} \cdot \sum_{j=i_*}^N \frac{1}{j-1}. \end{aligned}$$

Merk op dat

$$\sum_{j=i}^{N-1} \frac{1}{j} \approx \int_i^{N-1} \frac{1}{x} dx \approx \log(N-1) - \log(i),$$

zodat $i^* \approx (N-1)/e$. D.w.z. dat de optimale strategie voorschrijft om eerst ongeveer 33% van de papiertjes open te vouwen en vervolgens bij het eerstvolgende hoogste getal totdantoe te stoppen (en dit tot hoogste van allemaal te verklaren). De kans om de weddenschap te winnen is dan ongeveer $1/e$, dus ongeveer $(1/3)!$

De verwachte winst van Ted is, met $N = 50$, ongeveer

$$\frac{1}{3} \times 50 \times \text{€} 2 - \frac{2}{3} \times 50 \times \text{€} 0,75 = \text{€} 8\frac{1}{3},$$

dus Ted maakt gemiddeld winst!

Vraag 8.4

Beschouw het optimaal stoppen van een Markov keten met de volgende data.

$\mathbf{S} = \{1, 2, 3, 4, \Delta\}$; $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, $r_3 = 2$, $r_4 = 2$; $c_i = 0$, $1 \leq i \leq 4$.

$$p_{11} = \frac{1}{2}, p_{12} = \frac{1}{2}, p_{13} = 0, p_{14} = 0; p_{21} = \frac{1}{8}, p_{22} = \frac{1}{8}, p_{23} = \frac{1}{2}, p_{24} = \frac{1}{4};$$

$$p_{31} = \frac{1}{3}, p_{32} = \frac{1}{3}, p_{33} = \frac{1}{3}, p_{34} = 0; p_{41} = \frac{1}{4}, p_{42} = \frac{1}{8}, p_{43} = \frac{1}{2}, p_{44} = \frac{1}{8}.$$

Bepaal de optimale strategie voor dit stopprobleem.

8.6 Verdisconteerde opbrengsten

Een bedrag r dat verkregen wordt in periode 1 kan op de bank gezet worden tegen een *rente* ρ . Dan groeit het bedrag en is één periode later $(1 + \rho) \cdot r$ waard; in het algemeen is een bedrag r op tijdstip 1 vergelijkbaar met een bedrag $(1 + \rho)^t \cdot r$ op tijdstip t , $t = 0, 1, 2, \dots$

Zij $\alpha = (1 + \rho)^{-1}$, de *verdisconteringsfactor*. Merk op dat $\alpha \in (0, 1)$. Dan is omgekeerd een bedrag r dat op tijdstip t wordt verkregen equivalent met een bedrag $\alpha^{t-1} \cdot r$ op tijdstip 1, de zogenaamde *verdisconteerde waarde*. Dus de opbrengst $r_{X_t}(Y_t)$ op tijdstip t heeft op tijdstip 0 de verdisconteerde waarde $\alpha^t \cdot r_{X_t}(Y_t)$. De *totale verwachte α -verdisconteerde opbrengst*, gegeven begintoestand i en strategie R , wordt gedenoteerd als $v_i^\alpha(R)$ en gedefinieerd door

$$v_i^\alpha(R) = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{E}_{i,R} \{ \alpha^t \cdot r_{X_t}(Y_t) \} = \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t \sum_{j,a} \mathbb{P}_{i,R} \{ X_t = j, Y_t = a \} \cdot r_j(a).$$

Dit is goed gedefinieerd, mits aan de volgende aanname wordt voldaan.

Aanname 8.4 *Er bestaat een functie $M : \mathcal{S} \rightarrow [1, \infty)$ en constanten $c < 1/\alpha, r \geq 0$ zodat*

- $\sup_{a \in A(i), i \in \mathcal{S}} \frac{r_i(a)}{M_i} \leq r$;
- $\sum_{j \in \mathcal{S}} p_{ij}(a) M_j \leq c M_i, a \in A(i), i \in \mathcal{S}$.

Dat Aanname 8.4 Aanname 8.3 impliceert, kunnen we als volgt inzien. Laat $\mathcal{S}_\Delta = \mathcal{S} \cup \{\Delta\}$ en $\tilde{p}_{ij}(a) = \alpha p_{ij}(a)$, voor $i, j \in \mathcal{S}$, en $\tilde{p}_{i\Delta}(a) = 1 - \alpha$. Door Δ op de gebruikelijke wijze weer als een absorberende toestand met opbrengst 0 te definiëren, voldoet het probleem met toestandsruimte $\mathcal{S}_\Delta$, overgangskansen $\tilde{p}_{ij}(a)$, $i, j \in \mathcal{S}_\Delta$, $a \in A(i)$, en opbrengsten $r_i(a)$, $a \in A(i)$, $i \in \mathcal{S}$, aan Aanname 8.3 met contractie factor $\gamma = \alpha \cdot c$.

Als we $\tilde{v}(R)$ als de totale verwachte opbrengsten onder strategie R definiëren voor dit nieuwe probleem, dan geldt dat $\tilde{v}(R) = v^\alpha(R)$. Het α -disconteerde Markov beslissingsprobleem is dus een speciaal geval van het Markov beslissingsprobleem waarin de totale verwachte opbrengsten over een oneindige horizon worden gemaximaliseerd. Dus de resultaten uit paragraaf 8.3 gelden dus voor het α -verdisconteerde Markov beslissingsprobleem. In het vervolg laten we de put Δ weg uit de analyse.

N.B. Als $\mathcal{S}$ eindig is, dan voldoet het α -verdisconteerde Markov beslissingsprobleem altijd aan Aanname 8.4. Waarom?

De *waardevector* wordt met v^α genoteerd, id est $v^\alpha = \sup_R v^\alpha(R)$. Dae strategie R^* is een

optimale strategie als $v^\alpha(R_*) = v^\alpha$. Uit Paragraaf 8.3 volgt het optimale deterministische strategie f^∞ voor dit criterium.

Zij $R = (\pi^1, \pi^2, \dots) \in C(M)$, dan is $v^\alpha(R) = \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t P(\pi^1)P(\pi^2) \cdots P(\pi^{t-1})r(\pi^t)$ en voor een stationaire strategie π^∞ geldt

$$v^\alpha(\pi^\infty) = \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t P(\pi)^t r(\pi).$$

Voorbeeld 8.3 (vervolg)

Start met $x = (4, 4, 4)$ en neem $\varepsilon = 0.2$. De berekeningen staan hieronder. Het algoritme eindigt zodra de norm van het verschil van twee opeenvolgende y -vectoren hoogstens 0.1 is.

	Iteratie						
	1	2	3	4	5	6	7
y_1	5,00	8,50	9,50	10,13	10,38	10,53	10,59
y_2	8,00	10,50	11,50	12,13	12,38	12,53	12,59
y_3	11,00	13,00	14,25	14,75	15,06	15,19	15,27
f_1	3	3	3	3	3	3	3
f_2	1	3	3	3	3	3	3
f_3	2	2	2	2	2	2	2

f^∞ met $f(1) = 3$, $f(2) = 3$ and $f(3) = 2$ is een 0,2-optimale strategie en $(10, 59, 12, 59, 15, 27)$ is een 0,1-approximatie van v^α .

Vraag 8.5

Beschouw het volgende verdisconteerde model:

$$S = \{1, 2\}; A(1) = A(2) = \{1, 2\}; \alpha = \frac{1}{2}; r_1(1) = 1, r_1(2) = 0; r_2(1) = 2, r_2(2) = 2.$$

$$p_{11}(1) = \frac{1}{2}, p_{12}(1) = \frac{1}{2}; p_{11}(2) = \frac{1}{4}, p_{12}(2) = \frac{3}{4}.$$

$$p_{21}(1) = \frac{2}{3}, p_{22}(1) = \frac{1}{3}; p_{21}(2) = \frac{1}{3}, p_{22}(2) = \frac{2}{3}.$$

Gebruik het strategie verbetering algoritme om een optimale strategie te vinden (start met $f(1) = f(2) = 1$).

Vraag 8.6

Toon aan dat voor een gegeven beginverdeling β en een stationaire strategie π^∞ ,

$$\sum_j \beta_j v_j^\alpha(\pi^\infty) = \sum_{(i,a)} r_i(a) x_i^\pi(a).$$

Waarde-iteratie kan ook worden gebruikt om eigenschappen van een optimale strategie af te leiden. Dat zullen we illustreren aan de hand van het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 8.9 Machine vervangingsmodel

Een machine kan in toestanden $i \in S = \{1, \dots, N\}$ verkeren. Toestand 1 correspondeert met de best mogelijke staat. Aan het begin van elke dag wordt de toestand van de machine gecontroleerd en er wordt bepaald of de machine al dan niet vervangen moet worden. Als de machine vervangen wordt, is er instantaan een nieuwe machine (toestand 1).

Als de toestand i is de machine de volgende dag in toestand j met kans p_{ij} . De vervangingskosten zijn R en de onderhoudskosten zijn $C(i)$ als de machine aan het begin van de dag in toestand i is (na eventuele vervanging). Gevraagd is de strategie die de kosten minimaliseert (dit is hetzelfde probleem als min de kosten maximaliseren).

Verder nemen we aan dat

1. $i \mapsto \sum_{j \geq k} p_{ij}$ is een niet-dalende functie voor alle $k \in S$;
2. de kosten $C(i)$ zijn niet-dalend in i .

Laat actie 0 corresponderen met vervangen en actie 1 met niet vervangen. Dan is $A(i) = \{0, 1\}$ voor alle i . Verder geldt dat $p_{ij}(1) = p_{ij}$, $p_{ij}(0) = p_{1j}$. Tevens geldt voor de directe kosten (i.p.v. opbrengsten) $c_i(1) = R + C(1)$ en $c_i(0) = C(i)$.

We willen bewijzen dat de optimale strategie f_α^∞ de volgende vorm heeft: er is een toestand i_α zodanig dat

$$f_\alpha(i) = \begin{cases} 1, & i < i_\alpha \\ 0, & i \geq i_\alpha. \end{cases}$$

Zo'n strategie wordt een *drempelstrategie* genoemd.

Intuïtief is dit natuurlijk volstrekt aannemelijk. Een algemene aanpak voor het bewijs van een dergelijke uitspraak is via Algoritme (8.3). Als eerste stap willen we aantonen dat de waardevector v^α niet-dalend als functie van $i \in S$ is. Dat doen we door dit via inductie aan te tonen voor elke approximatie v^n .

Kies nu $v^1 = 0$. Dan is

$$v_i^2 = \min\{C(i), C(1) + R\}, \quad i \in S.$$

Dit is het minimum van twee niet-dalende functies, en derhalve weer niet-dalend. Om het inductieargument rond te krijgen bewijzen we eerst de volgende uitspraak.

Lemma 8.20 *Stel dat $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ een niet-dalende functie is. Dan geldt dat $i \mapsto \sum_j p_{ij}h(j)$ ook niet-dalend is.*

Bewijs Herschrijf

$$\begin{aligned} \sum_j p_{ij}h(j) &= (h(N) - h(N-1))p_{iN} + (h(N-1) - h(N-2))(p_{iN} + p_{iN-1}) \\ &\quad + \dots + (h(2) - h(1)) \sum_{j=2}^N p_{ij} + \sum_{j=1}^N h(1)p_{ij}. \end{aligned}$$

Gebruik nu het feit dat $h(k) - h(k-1) \geq 0$ voor $k = 2, \dots, N$ en de aanname dat $i \mapsto \sum_{j \geq k} p_{ij}$ niet-dalend is voor alle $k \in S$. $\square$

De inductiestap volgt nu gemakkelijk en we concluderen dat v^{n+1} niet-dalend in i is. Dan geldt hetzelfde voor $v^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} v^n$. De waardevector voldoet aan

$$v_i^\alpha = \min\{C(i) + \alpha \sum_j p_{ij} v_j^\alpha, C(1) + R + \alpha \sum_j p_{1j} v_j^\alpha\},$$

en is het minimum van twee niet-dalende functies, waarvan de tweede constant is. De optimale strategie kiest steeds de minimaliserende acties. Kies nu

$$i_\alpha = \min\{i \mid C(1) + R + \alpha \sum_j p_{1j} v_j^\alpha \leq C(i) + \alpha \sum_j p_{ij} v_j^\alpha\}.$$

Het gestelde volgt onmiddellijk.

8.7 Opgaven

Opgave 8.1 Voorraadprobleem zonder nalevering

Beschouw een niet-stationair voorraadprobleem zonder nalevering (d.w.z. dat als er tekorten ontstaan, dan worden deze niet nageleverd) over een eindige horizon met de volgende parameters:

- T = het aantal perioden;
- $p_j(t)$ = de kans op eenvraag van j in periode t , $j = 0, 1, \dots$;
- c = de prijs van één item;
- h = de voorraadkosten per item dat aan het einde van een periode onverkocht achterblijft;
- p = de boetekosten per tekort dat er aan het einde van de periode is;
- B = de eindige voorraadcapaciteit.

Het optimaliseringsprobleem is: welke voorraadstrategie minimaliseert de totale verwachte kosten?

Formuleer dit model als Markov beslissingsmodel.

Opgave 8.2 Optimaal stopprobleem

Beschouw een persoon die een aandeel wil verkopen. Hij krijgt aan het begin van iedere dag een bod. We nemen aan dat zo'n bod met kans p_j de waarde j heeft, $0 \leq j \leq N$. Hij moet direct beslissen of hij het bod aanneemt of verwerpt. Als hij het bod verwerpt, dan gaat deze aanbieding verloren en kost hem dat een bedrag c . Welke strategie maximaliseert zijn verwachte totale opbrengst?

- a. Formuleer dit probleem als een optimaal stopprobleem.
- b. Is dit een monotoon stopprobleem?

Opgave 8.3 Beste keuze probleem Gegeven een reeks van N potentiële strategische beslissingen die achtereenvolgens genomen worden. De i -beslissing heeft waarde $X_i = 0$ als de beslissing een mislukking blijkt, en waarde $X_i = 1$ als het een succes is. De succeskans is $p_i < 1$. De waarden zijn onderling onafhankelijk, en de succesansen zijn bekend.

Na elke beslissing kunnen we besluiten te stoppen of door te gaan. Ons doel is om de kans te maximaliseren dat we met de laatste succesvolle beslissing stoppen (alle latere beslissingen lopen op mislukking uit). Formuleer dit probleem als een monotoon optimaal stopprobleem en los het op. Geef de waardevector. Hint: Voorbeeld 8.8 ‘raad het hoogste getal’ kan hergemodelleerd worden als een speciaal geval van dit probleem. In dit geval is $X_i = 1$ te interpreteren als de gebeurtenis dat het i -de opgevouwen papiertje het hoogste getal totnu toe bevat.

Opgave 8.4 Correctie van drukproeven Een manuscript is zojuist getypt. Het aantal fouten M dat er nog in zit, heeft een Poisson verdeling met parameter λ . De fouten die tijdens een correctie gevonden worden, worden gecorrigeerd. Elke drukproefcorrectie kost c_1 . Met kans p wordt een nog niet gevonden fout in de volgende correctie wel gevonden. Elke niet gevonden fout in het eindresultaat geeft boetekosten c_2 .

Hoeveel keer moet er gecorrigeerd worden alvorens het manuscript naar de drukker te sturen? Welke ‘correctie’strategie minimaliseert de totale verwachte kosten?

a) Gegeven zij dat er in het totaal i fouten zijn gevonden in n correcties. Leid af dat

1. het aantal nog onontdekte fouten dat in de volgende correctie wordt gevonden een Poissonverdeling met parameter $\lambda p(1-p)^n$ heeft;
2. het aantal nog onontdekte fouten een Poissonverdeling heeft met parameter $\lambda(1-p)^n$;

Hint: je mag het volgende resultaat gebruiken. Stel A heeft een Poisson verdeling met parameter μ en $P\{B = l | A = k\} = \binom{k}{l} q^l (1-q)^{k-l}$, $l \leq k$. Dan heeft B een Poissonverdeling met parameter $\mu \cdot q$.

b) Formuleer dit probleem als een monotoon optimaal stopprobleem. Los het op.

Opgave 8.5 Veronderstel dat u een werknemer in dienst hebt en aan het begin van iedere maand kan beslissen over zijn salaris voor die maand: ofwel een laag salaris (2300 euro) ofwel een hoog salaris (3000 euro). De werknemer kan, zodra het zijn salaris hoort, beslissen om in dienst te blijven of om te vertrekken. Hij moet daarbij een opzegtermijn van één maand in acht nemen.

De kans dat de werknemer vertrekt is 40% bij een laag salaris en 20% bij een hoog salaris. Als de werknemer vertrekt, dan huurt u voor de volgende maand iemand van een uitzendbureau in voor 4000 euro per maand. Als u iemand van een uitzendbureau in dienst heeft gaat u bovendien iedere maand adverteren voor een nieuwe ‘gewone’ werknemer.

De kans om een nieuwe ‘gewone’ werknemer te vinden (die dan begint in de volgende maand) hangt af van het advertentiebedrag: 70% bij een advertentiebedrag van 300 euro en 90% bij een advertentiebedrag van 600 euro.

Wat is een optimale stregie m.b.t. het salarisaanbod en het advertentiebedrag voor de komende zes maanden?

Opgave 8.6 Geef de optimaliteitsvergelijking van het volgende verdisconteerde model

$S = \{1, 2\}$; $A(1) = A(2) = \{1, 2\}$; $\alpha = 0.9$; $r_1(1) = 4, r_1(2) = 2, r_2(1) = 0, r_2(2) = 2$;
 $p_{11}(1) = \frac{1}{3}, p_{12}(1) = \frac{2}{3}, p_{11}(2) = \frac{2}{3}, p_{12}(2) = \frac{1}{3}, p_{21}(1) = 1, p_{22}(1) = p_{21}(2) = 0, p_{22}(2) = 1$.

Opgave 8.7 Beschouw de volgende modificatie van het strategie-verbeterings-algoritme voor het α -verdisconteerde Markov beslissingsprobleem met $S = \{1, \dots, N\}$.

1. Start met een willekeurige $f \in C(D)$.
2. Bepaal $v^\alpha(f^\infty)$ als unieke oplossing van het lineaire stelsel $L_f x = x$.
3. Voor $i = 1$ tot N doe
 - a) bereken $d_{ia}(f) = r_i(a) + \alpha \sum_{j=1}^{i-1} p_{ij}(a)x_j + \alpha \sum_{j=i}^N p_{ij}(a)v_j^\alpha(f^\infty)$, $a \in A(i)$;
 - b) als $d_{ia}(f) \leq v_i^\alpha(f^\infty)$ voor iedere $a \in A(i)$, dan: $x_i = v_i^\alpha(f^\infty)$ en $g(i) = f(i)$;
 - c) als $d_{ia}(f) > v_i^\alpha(f^\infty)$ voor een $a \in A(i)$, dan: $x_i = \max_a d_{ia}(f)$ en kies $g(i)$ zdd.
 $d_{ig(i)} = x_i$.
4. Als $g(i) = f(i)$ voor iedere $i \in S$: ga naar stap 6.
5. $f := g$ en ga naar stap 2.
6. f^∞ is een optimale strategie (STOP).

Bewijs de correctheid van deze methode door het volgende aan te tonen:

- a) (i) $x \geq v^\alpha(f^\infty)$; (ii) $x = v^\alpha(f^\infty)$ dan en slechts dan als $f = g$.
- b) Als $f = g$, dan is f^∞ een optimale strategie.
- c) Als $f \neq g$, dan geldt: $v^\alpha(g^\infty) \geq x > v^\alpha(f^\infty)$.

Opgave 8.8 Pas de methode uit Opgave 8.7 toe op het model Voorbeeld 8.3.

Opgave 8.9 Gebruik lineaire programmering om de waardevector en een optimale strategie te bepalen voor het model uit Vraag 8.5 (neem $\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}$).

Opgave 8.10 Gebruik waarde iteratie om een ε -optimale strategie voor het model uit Vraag 8.6 te bepalen. Neem $\varepsilon = 0.2$ en start met $x = (2, 2)$.

Opgave 8.11 Toon aan dat voor het rood-zwart casino model voldaan is aan $\max_{i \in S} y_i^{|S|+1} < 1$, waarbij $y_i^0 = 1$, $i \in S^-$ en $y_i^n = \max_{a \in A(i)} \sum_j p_{ij}(a) y_j^{n-1}$, $i \in S^-$ en $n \geq 1$.

Opgave 8.12 Een dief gaat iedere nacht op dievenpad en met kans p_k steelt hij goederen ter waarde van het bedrag k , $k = 0, 1, \dots, n$. Iedere nacht heeft hij een kans p om gesnapt te worden. Als hij wordt gesnapt is hij zijn buit van die nacht en van alle vorige nachten kwijt. Wanneer, d.w.z. bij welk totaal vergaard bedrag, is het voor deze dief verstandig om te stoppen met zijn nachtelijke rooftochten?

Opgave 8.13 Beschouw het volgende probleem van een taxichauffeur, die heen en weer rijdt tussen drie steden: A, B en C. Als hij in stad A of C is, dan heeft hij drie mogelijke acties: (1) hij kan rondrijden in de hoop een passagier op te kunnen pikken; (2) hij kan naar de dichtstbijzijnde taxistandplaats rijden en daar wachten op een passagier; (3) hij kan ter plekke blijven staan en wachten op een oproep van de centrale. In stad B heeft hij alleen de eerste twee opties. De overgangskansen en de directe opbrengsten worden gegeven door de volgende tabel:

van stad	actie	naar stad A	naar stad B	naar stad C	directe opbrengst
A	1	0.5	0.25	0.25	8
	2	0.1	0.7	0.2	3
	3	0.25	0.25	0.5	5
B	1	0.5	0	0.5	12
	2	0.1	0.8	0.1	10
C	1	0.25	0.25	0.5	7
	2	0.2	0.6	0.2	4
	3	0.7	0.1	0.2	5

Laat $\alpha = 1/2$.

Stel voor dit model de optimaliteitsvergelijking op en los deze op.

Opgave 8.14 Bepaal voor het model uit Opgave 8.13 een optimale strategie met strategie verbetering.

Start met f^∞ met $f(1) = f(2) = f(3) = 1$.

Opgave 8.15 Bepaal voor het model uit Opgave 8.13 een optimale strategie met lineaire programmering.

Opgave 8.16 Bepaal voor het model uit Opgave 8.13 een optimale strategie met waarde iteratie. Neem $\varepsilon = 0.2$ en $v^0 = (0, 0, 0)$.

Opgave 8.17 Kwaliteitscontrole en herstel Een bedrijf produceert een product voor de universiteit. Voor de productie van dit product is een contract met de universiteit afgesloten, dat zonder boete op elk tijdstip door de universiteit kan worden opgezegd. Het productieproces van dit product kan in twee toestanden verkeren: ‘goed’ of ‘slecht’.

In welke toestand het productieproces is, kan slechts gededuceerd worden op basis van de productieresultaten. Elke dag produceert het bedrijf één exemplaar van het product en inspecteert dit. Op grond van het inspectieresultaat, wordt het product als ‘goedgekeurd’ of als ‘afgekeurd’ geclassificeerd. De universiteit accepteert slechts een goedgekeurd product, en zij betaalt hiervoor $r > 0$.

Afgekeurde producten worden ‘weggegooid’. Als het productieproces ‘slecht’ is, wordt elk exemplaar afgekeurd. Dientengevolge betekent een goedgekeurd product dat het proces gedurende diens productie ‘goed’ was.

Wanneer het productieproces ‘goed’ is, is de kans dat een product wordt goedgekeurd gelijk aan $p \in (0, 1)$. De kans dat het productieproces ‘goed’ is tijdens de productie van een exemplaar, gegeven dat het ‘goed’ was tijdens de productie van het vorige exemplaar is $q \in (0, 1)$. Zodra het productieproces ‘slecht’ is, blijft het ‘slecht’ totdat er een hersteloperatie is uitgevoerd.

De kans dat de universiteit het contract nog een dag prolongeert, is $\beta \in (0, 1)$, onafhankelijk van de toestand van het productieproces. Zodra de universiteit het contract opzegt, krijgt het bedrijf geen inkomsten meer van de universiteit, en heeft het ook geen kosten meer. Als de universiteit het contract nog minstens een dag prolongeert, dan zijn er voor de huidige dag twee mogelijkheden: een hersteloperatie uitvoeren tegen kosten $K > 0$, of niet. De herstelduur is verwaarloosbaar. Het bedrijf moet een hersteloperatie uitvoeren als achtereenvolgens S exemplaren zijn afgekeurd sinds de vorige reparatie, en sinds het laatste goedgekeurde exemplaar is geproduceerd.

Wat is de herstelstrategie met maximale opbrengst totdat de universiteit het contract opzegt?

- a) Zij p_s de voorwaardelijke kans dat exemplaar $s + 1$ goedgekeurd is, gegeven dat exemplaren $1, \dots, s$ afgekeurd waren, en exemplaar 0 goedgekeurd was, of het productieproces net hersteld was voordat aan de productie van exemplaar 1 wordt begonnen. Geef een formule voor p_s in termen van p, q , en s .
- b) Modelleer het beslissingsprobleem als een Markov beslissingsprobleem door toestanden, actie, in overgangskansen toe specificeren (met uitleg en in termen van Model the decision problem as a Markov decision problem. Define states, actions and transitions probabilities β, K, r en p_s). Geef de optimaliteitsvergelijking. Voldoet het probleem aan Aannname 8.3? Leg uit.
- c) Laat zien dat er een optimale drempelstrategie is, d.w.z., er een getal s^* , zodat het optimaal is om alleen te herstellen als $s \geq s^*$. Hierbij is s het aantal afgekeurde exemplaren sinds het laatste goedgekeurde of sinds de laatste hersteloperatie. *Hint:* laat eerst zien dat p_s

niet-stijgend is in s . Toon vervolgens met inductie naar m aan, dat de maximale verwachte winst over m niet-stijgend is als functie van de toestand.

Opgave 8.18 (Een simpel ‘bandiet’ probleem) Gegeven een Markovketen op de toestandsruimte $\{1, 2, 3, 4\}$, met overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.8 & 0.1 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Dit proces wordt geobserveerd door een beslisser, die op elk tijdstip kan besluiten te stoppen, en dan een beloning $q = 20$ ontvangt, of door te gaan en dan een beloning r_i ontvangt, als de huidige toestand i is. Als de beslisser besluit door te gaan, wordt zijn volgende toestand bepaald door P . We nemen aan dat de verdisconteringsfactor gelijk is aan $\alpha = 0,9$, en dat $r_i = i$. Het doel van de beslisser is een stopstrategie zo te kiezen met maximale verwachte inkomsten.

- i) Formuleer dit probleem als een Markov beslissingsprobleem.
- ii) Gebruik strategie-verbetering om een stationaire strategie te bepalen met maximale totale verwachte α -verdisconteerde inkomsten.
- iii) Bepaal de kleinste waarde van q , zo dat het optimaal is om in toestand 2 te stoppen.
- iv) Laat voor willekeurige matrix P , toestandsruimte $\mathcal{S} = \{1, \dots, N\}$, $N < \infty$, zien, dat er voor elke toestand i een getal q_i bestaat zo dat stoppen optimaal is in toestand i d.e.s.d.a. $q \geq q_i$.
Hint: laat zien dat $V_\alpha(i, q) - q$ niet-stijgend is in R , waarbij v_q^α de waarde functie is van het probleem met stopopbrengst q .

Opgave 8.19 De directeur van een firma neemt aan het begin van elke maand de beslissing of hij diezelfde maand zijn werknemers zal belonen met een bonus, of niet. Zijn beslissing baseert hij op de behaalde resultaten van de betreffende werknemer. We nemen aan dat de bonus € 700 bedraagt. Een werknemer kan besluiten om de bonus te accepteren of zijn baan op te zeggen op een termijn van 1 maand. De kans dat een werknemer zijn baan opzegt, is 40%, als hij geen bonus krijgt, en 20% als hij deze wel krijgt.

Als de werknemer zijn baan opzegt, moet de directeur iemand van een uitzendbureau inhuren. Dit brengt extra kosten met zich mee, in casu € 1700. Daarnaast zet de directeur maandelijks een advertentie in de krant voor een nieuwe werknemer. Met kans 0,7 vindt de directeur een geschikte nieuwe werknemer (die de volgende maand begint) als hij een kleine advertentie à € 300 heeft geplaatst, en met kans 0,9 één, als hij een grote advertentie à € 600 heeft geplaatst. We nemen aan dat de verdisconteringsfactor 0,9 is.

Bereken een strategie met minimale totale α -verdisconteerde kosten voor zowel een eindige horizon van 6 maanden, als voor een oneindige horizon. Vergelijk de resultaten.

Bijlage A

OPLOSSING VAN DE VRAGEN

A.1 Hoofdstuk 5

Vraag 5.1

Veronderstel dat elke klant 1 euro betaalt voor iedere tijdseenheid die de klant in het systeem verblijft en nog niet geholpen wordt. De systeembeheerder ontvangt dan op de lange duur L_q euro per tijdseenheid. Anderzijds is het gemiddelde bedrag dat een klant betaalt op de lange duur W_q euro en per tijdseenheid komen gemiddeld λ klanten binnen. Als de klanten bij binnenkomst moeten betalen, dan ontvangt de systeembeheerder gemiddeld dus λW_q euro per tijdseenheid. Hieruit volgt dat $L_q = \lambda W_q$.

Vraag 5.2

$$L = \sum_n n P_n = 2.7; \quad L_q = \sum_{n \geq s+1} (n-s) P_n = 0.95; \quad \rho = \frac{L-L_q}{s} = 0.875.$$

Vraag 5.3

Het model is een geboorte-sterfte proces met $\lambda_0 = 3$, $\lambda_1 = 3 \times \frac{2}{3} = 2$, $\lambda_2 = 3 \times \frac{1}{3}$, $\lambda_n = 0$, $n \geq 3$; $\mu_n = 2$ voor $n \geq 0$, zodat $C_0 = 1$, $C_1 = \frac{3}{2}$, $C_2 = \frac{3}{2}$, $C_3 = \frac{3}{4}$ en $C_n = 0$ voor $n \geq 4$.

$$P_0 = \{1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{4}\}^{-1} = \frac{4}{19} \rightarrow P_1 = \frac{6}{19}, \quad P_2 = \frac{6}{19}, \quad P_3 = \frac{3}{19}.$$

De kans dat een klant weggaat is: $\frac{1}{3} \times P_1 + \frac{2}{3} \times P_2 + P_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{19} + \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{19} + \frac{3}{19} = \frac{9}{19}$. Omdat er per uur gemiddeld 3 klanten aankomen is het verlies per uur $3 \times \frac{9}{19} \times 20 = \frac{540}{19} \approx 28.42$ euro.

Vraag 5.4

Neem als tijdseenheid 1 minuut. Dan is $\lambda = \frac{3}{2}$ en $\mu = 2$.

De eerste eis luidt: $W_q \leq 1$ en de tweede eis is: $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \geq 0.9$.

Het eerste model is een $M/M/1$ -wachrij met $\rho = \frac{3}{4}$, waarvoor geldt: $W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{3}{2}$.

Er is dus niet aan de eerste eis voldaan.

Beschouw vervolgens het $M/M/2$ -model. Hierin is $\rho = \frac{3}{8}$.

$$P_0 = \left\{1 + \frac{3}{4} + \frac{(3/4)^2}{2!} \cdot \frac{1}{5/8}\right\}^{-1} = \frac{5}{11}.$$

$$L_q = \frac{(3/4)^2}{2!} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{1}{(5/8)^2} = \frac{27}{220}.$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{9}{110}.$$

Aan de eerste voorwaarde is dus voldaan.

$$P_0 = \frac{5}{11} \approx 0.45; \quad P_1 = \frac{3}{4} \cdot P_0 \approx 0.34; \quad P_2 = \frac{3}{8} \cdot P_1 \approx 0.12; \quad P_3 = \frac{3}{8} \cdot P_2 \approx 0.05; \quad P_4 = \frac{3}{8} \cdot P_3 \approx 0.02.$$

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \approx 0.97.$$

Aan de tweede voorwaarde is ook voldaan.

Tenslotte beschouwen we het $M/M/2$; $FIFO/N/\infty$ -model met $N = 4$.

$$P_0 = \left\{1 + \frac{3}{4} + \frac{(3/4)^2}{2!} \cdot \left\{1 + \frac{3}{8} + \left(\frac{3}{8}\right)^2\right\}^{-1}\right\}^{-1} \approx 0.46.$$

$P_1 = \frac{3}{4} \cdot P_0 \approx 0.34$; $P_2 = \frac{3}{8} \cdot P_1 \approx 0.12$; $P_3 = \frac{3}{8} \cdot P_2 \approx 0.05$; $P_4 = \frac{3}{8} \cdot P_3 \approx 0.02$. $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \approx 0.99$. Twee loketten zijn dus voldoende (dit was ook in te zien via het vorige model: omdat nu de toestandsruimte beperkt is, is P_0 groter en daarom ook de andere P_n -waarden).

Vraag 5.5

Het oorspronkelijke model is een $M/M/1$ -model. Neem als tijdseenheid 1 uur, dan is $\lambda = 9$ en $\mu = 10$, zodat $\rho = \frac{9}{10}$.

Voor dit model is $L = \frac{\rho}{1-\rho} = 9$ en $W = \frac{L}{\lambda} = 1$ uur.

a. In dit model is $\mu = 15$, zodat $\rho = \frac{9}{15} = 0.4$. Nu geldt: $L = \frac{\rho}{1-\rho} = 1.5$ en $W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{6}$ uur, d.w.z. 10 minuten.

b. Dit is een $M/M/2$ -model en $\rho = \frac{9}{20} = 0.45$. $L_q = \frac{(9/10)^2}{2!} \cdot \frac{0.45}{0.55^2} \cdot \{1 + 0.9 + \frac{0.9^2}{2!} \cdot \frac{1}{0.55}\}^{-1} = 0.23$. $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = 0.025$; $W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.125$, d.w.z. ongeveer 7.5 minuten.

c. Dit komt neer op twee $M/M/1$ -wachtrij met $\lambda = 4.5$ en $\mu = 10$, zodat $\rho = 0.45$.

Er geldt: $L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{9}{11}$ en $W = \frac{L}{\lambda} = \frac{2}{11}$ uur, d.w.z. 11 minuten.

Vraag 5.6

Dit is een $M/M/s$; $FIFO/N/N$ -model met $\lambda_n = (N-n)\lambda$, $0 \leq n \leq N$ en $\mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{voor } 1 \leq n \leq s-1; \\ s\mu & \text{voor } s \leq n \leq N. \end{cases}$

De balansvergelijkingen zijn:

$$\begin{aligned} (N\lambda)P_0 &= \mu P_1 \\ (N-n)\lambda P_n + n\mu P_n &= (N-n+1)\lambda P_{n-1} + (n+1)\mu P_{n+1}, \quad 1 \leq n \leq s-1 \\ (N-n)\lambda P_n + s\mu P_n &= (N-n+1)\lambda P_{n-1} + s\mu P_{n+1}, \quad s \leq n \leq N-1 \\ \lambda P_{N-1} &= s\mu P_N \end{aligned}$$

Als $N = 3$, $s = 2$, $\lambda = 1$ en $\mu = 2$, dan geeft dit: $\lambda_0 = 3$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 4$, $\mu_3 = 4$.

$$C_0 = 1, \quad C_1 = \frac{3}{2}, \quad C_2 = \frac{3}{4}, \quad C_3 = \frac{3}{16} \rightarrow P_0 = \{1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{16}\}^{-1} = \frac{16}{55}.$$

De kans dat het werk volledig stil ligt is $P_3 = C_3 P_0 = \frac{3}{55}$.

Vraag 5.7

a. Als z_i een meervoudig nulpunt is, dan is $\frac{d}{dz}\{1 - \rho \cdot \frac{z+z^2+\dots+z^k}{k}\}_{z=z_i} = 0$, d.w.z.

$$1 + 2z_i + 3z_i^2 + \dots + kz_i^{k-1} = 0. \text{ Vermenigvuldig met } (1 - z_i): 1 + z_i + z_i^2 + \dots + z_i^{k-1} - kz_i^k = 0,$$

ofwel $1 + z_i + z_i^2 + \dots + z_i^{k-1} = kz_i^k$, wat voor $|z_i| > 1$ onmogelijk is omdat

$$|1 + z_i + z_i^2 + \dots + z_i^{k-1}| \leq 1 + |z_i| + |z_i^2| + \dots + |z_i^{k-1}| \leq 1 + (k-1)|z_i^k| < k|z_i^k|.$$

b. Het is voldoende om aan te tonen dat $(1 - \frac{z}{z_1})(1 - \frac{z}{z_2}) \dots (1 - \frac{z}{z_k}) \sum_{i=1}^k \frac{A_i}{(1-z/z_i)} = 1$,

d.w.z. $\sum_{i=1}^k A_i \prod_{j \neq i} (1 - z/z_j) - 1 = 0$, ofwel $g(z) = \sum_{i=1}^k \frac{\prod_{j \neq i} (1 - z/z_j)}{\prod_{j \neq i} (1 - z_i/z_j)} - 1 = 0$ voor alle z .

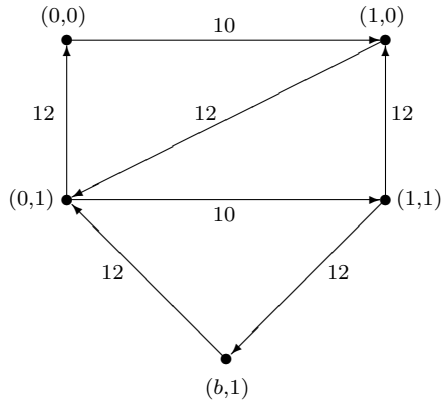
$$g(z) = 0 \text{ voor alle } z_i, \quad 1 \leq i \leq k, \text{ want } \frac{\prod_{j \neq i} (1 - z/z_j)}{\prod_{j \neq i} (1 - z_i/z_j)} = \begin{cases} 0 & \text{voor } z = z_j, \quad j \neq i \\ 1 & \text{voor } z = z_i \end{cases}$$

De functie $g(z)$ is een polynoom van de graad hoogstens $k-1$ met k nulpunten, dus deze is identiek aan de nulfunctie.

Vraag 5.8

We nemen de volgende toestandsverz. $S = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1), (b,1)\}$, waarbij (i,j) betekent dat in station 1 i klanten en in station 2 j klanten zijn en met toestand $(b,1)$ wordt bedoeld dat de klant in station 1 klaar is met zijn bediening en wacht om in station 2 te worden toegelaten. Omdat de resterende bedieningsduur bij station 2 in dat geval exponentieel is, is dit proces

een continue Markov keten. Hieronder staat een plaatje van deze keten met de bijbehorende overgangen en snelheden.



a. De evenwichtsvergelijkingen zijn:

$$\begin{aligned} 12P_{01} &= 10P_{00} \\ 12P_{11} + 10P_{00} &= 12P_{10} \\ 12P_{10} + 12P_{b1} &= 12P_{01} + 10P_{01} \\ 10P_{01} &= 12P_{11} + 12P_{11} \\ 12P_{11} &= 12P_{b1} \end{aligned}$$

De oplossing van dit stelsel is:

$$P_{00} = \frac{72}{267}, P_{01} = \frac{60}{267}, P_{10} = \frac{85}{267}, P_{11} = \frac{25}{267}, P_{b1} = \frac{25}{267}.$$

b. De kans dat een aankomende klant het systeem niet binnenkomt is $P_{10} + P_{11} + P_{b1} = \frac{135}{267} = \frac{45}{89}$.

c. Het verwachte aantal klanten L in het systeem is $P_{10} + P_{11} + 2P_{11} + 2P_{b1} = \frac{245}{267}$.

d. De kans dat een aankomende klant het systeem binnenkomt is $1 - \frac{45}{89} = \frac{44}{89}$, zodat de effectieve aankomstsnellheid $\bar{\lambda} = \frac{44}{89} \times 10 = \frac{440}{89}$. Hieruit volgt: $W = \frac{L}{\bar{\lambda}} = \frac{49}{264}$.

Vraag 5.9

Het stelsel (5.7.2) is:
$$\begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 10 + \frac{1}{3}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_3 \\ \lambda_3 = 15 + \frac{1}{3}\lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$$
 waaruit volgt dat $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 40$ en $\lambda_3 = \frac{170}{3}$.

$$L = \frac{\lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2 - \lambda_2} + \frac{\lambda_3}{\mu_3 - \lambda_3} = \frac{5}{10-5} + \frac{40}{50-40} + \frac{170/3}{100-170/3} = 1 + 4 + \frac{17}{13} = 6\frac{4}{13}.$$

$$W = \frac{L}{r_1 + r_2 + r_3} = \frac{82/13}{30} = \frac{41}{165}.$$

A.2 Hoofdstuk 6

Vraag 6.1

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{2}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i \bar{X}_n + \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \bar{X}_n^2.$$

Omdat $X_i \in \{0, 1\}$ is $X_i^2 = X_i$ voor alle i en omdat $\sum_{i=1}^n X_i = n\bar{X}_n$, geeft dit:

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{2n}{n-1} \bar{X}_n^2 + \frac{n}{n-1} \bar{X}_n^2 = \frac{n}{n-1} \bar{X}_n - \frac{n}{n-1} \bar{X}_n^2 = \frac{n}{n-1} \bar{X}_n (1 - \bar{X}_n).$$

Vraag 6.2

Zij x_i = het verwachte aantal worpen voordat het spel uit is als $|M - K| = i$, $i = 0, 1, 2$.

Dan geldt:

$$x_0 = 1 + x_1$$

$$x_1 = 1 + \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_2$$

$$x_2 = 1 + \frac{1}{2}x_1$$

Dit stelsel heeft een unieke oplossing: $x_0 = 9$, $x_1 = 8$, $x_2 = 5$.

Vraag 6.3

$$\mathbb{E}\{T_n\} = n \cdot \mathbb{E}\{U_1\} = n \cdot \int_0^1 x \, dx = n \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2}.$$

$$\text{var}\{T_n\} = n \cdot \text{var}\{U_1\} = n \{ \mathbb{E}\{U_1^2\} - \{\mathbb{E}\{U_1\}\}^2 \} = n \{ \int_0^1 x^2 \, dx - \frac{1}{4} \} = n \cdot \{ \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \} = \frac{n}{12}.$$

Vraag 6.4

$$\text{a. } F(x) = \int_0^x 2y \, dy = x^2 \rightarrow u = x^2 \rightarrow x = \sqrt{u}.$$

$$\text{b. } F(x) = \int_{10}^{30} \frac{1}{20} \, dy = \frac{1}{20}(x - 10) \rightarrow u = \frac{1}{20}(x - 10) \rightarrow x = 10 + 20u.$$

Vraag 6.5

$$x = \mu + \sigma \cdot \{ \sum_{i=0}^{12} u_i - 6 \} = 20 + 6 \cdot \{ 7.186 - 6 \} = 27.116.$$

Vraag 6.6

a. Dit is een $M/M/1$ -wachtrij met $\lambda = 0.2$, $\mu = 0.25$, dus $\rho = 0.2/0.25 = 0.8$.

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = 4, \quad W = L/\lambda = 20, \quad W_q = W - 1/\mu = 16 \text{ en } L = \lambda W_q = 3.2.$$

b. Voor de trekking van de tussentijden en de bedieningsduren nemen we:

$$-\frac{1}{\lambda} \ln u = -5 \ln u \text{ resp. } -\frac{1}{\mu} \ln u = -4 \ln u.$$

Dit geeft de volgende uitkomsten:

klant	aselect getal	tussen- tijd	aselect getal	bedie- ningsduur	klant	aselect getal	tussen- tijd	aselect getal	bedie- ningsduur
1	0.09656	11.69	0.96657	0.14	7	0.60857	2.48	0.73479	1.23
2	0.64842	2.17	0.49222	2.84	8	0.33581	5.46	0.17360	7.00
3	0.49506	3.52	0.10145	9.15	9	0.30406	5.95	0.05842	11.36
4	0.48555	3.61	0.23505	5.79	10	0.72044	1.64	0.90764	0.39
5	0.90430	0.50	0.04180	12.70	11	0.07202	13.15	0.96341	0.15
6	0.24712	6.90	0.55799	2.33	12	0.23699	7.20	0.76172	1.09

In onderstaande tabel staat de simulatie uitgewerkt:

tijdstip	gebeur- tenis	aantal in systeem	aantal in wachtrij	volgende aankomst	volgend vertrek
00.00		0	0	11.69 (1)	
11.69	A1	1	0	13.86 (2)	11.83 (1)
11.83	V1	0	0		
13.86	A2	1	0	17.78 (3)	16.70 (2)
16.70	V2	0	0		
17.78	A3	1	0	21.39 (4)	26.93 (3)
21.39	A4	2	1	21.89 (5)	
21.89	A5	3	2	28.79 (6)	
26.93	V3	2	1		32.72 (4)
28.79	A6	3	2	31.27 (7)	
31.27	A7	4	3	36.73 (8)	
32.72	V4	3	2		45.42 (5)
36.73	A8	4	3	42.68 (9)	
42.68	A9	5	4	44.32 (10)	
44.32	A10	6	5	57.47 (11)	
45.42	V5	5	4		47.75 (6)
47.75	V6	4	3		48.98 (7)
48.98	V7	3	2		55.98 (8)
55.98	V8	2	1		67.34 (9)
57.47	A11	3	2	64.67 (12)	
60.00					

In de intervallen 0.00 – 11.69, 11.83 – 13.86 en 16.70 – 17.78 is de bediende vrij, dus

$$\rho = 1 - \frac{14.8}{60} = 0.75.$$

$$\begin{aligned}
60L &= (11.83 - 11.69) \cdot 1 + (16.70 - 13.86) \cdot 1 + (21.39 - 17.78) \cdot 1 + (21.89 - 21.39) \cdot 2 + \\
&\quad (26.93 - 21.89) \cdot 3 + (28.79 - 26.93) \cdot 2 + (31.27 - 28.79) \cdot 3 + (32.72 - 31.27) \cdot 4 + \\
&\quad (36.73 - 32.72) \cdot 3 + (42.68 - 36.73) \cdot 4 + (44.32 - 42.68) \cdot 5 + (45.42 - 44.32) \cdot 6 + \\
&\quad (47.75 - 45.42) \cdot 5 + (48.98 - 47.75) \cdot 4 + (55.98 - 48.98) \cdot 3 + (57.47 - 55.98) \cdot 2 + \\
&\quad (60.00 - 57.47) \cdot 3 = 136.48.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt: $L = 136.48/60 = 2.27$.

$$\begin{aligned}
 60L_q = & (21.89 - 21.39) \cdot 1 + (26.93 - 21.89) \cdot 2 + (28.79 - 26.93) \cdot 1 + (31.27 - 28.79) \cdot 2 + \\
 & (32.72 - 31.27) \cdot 3 + (36.73 - 32.72) \cdot 2 + (42.68 - 36.73) \cdot 3 + (44.32 - 42.68) \cdot 4 + \\
 & (45.42 - 44.32) \cdot 5 + (47.75 - 45.42) \cdot 4 + (48.98 - 47.75) \cdot 3 + (55.98 - 48.98) \cdot 2 + \\
 & (57.47 - 55.98) \cdot 1 + (60.00 - 57.47) \cdot 2 = 93.24.
 \end{aligned}$$

Hieruit volgt: $L_q = 93.24/60 = 1.55$.

De volgende tabel geeft de gegevens voor W en W_q :

klant	tijd in systeem	tijd in wachtrij	klant	tijd in systeem	tijd in wachtrij
1	0.14	0.00	5	24.03	10.83
2	2.84	0.00	6	18.96	16.63
3	9.15	0.00	7	17.71	16.48
4	11.33	5.54	8	19.25	12.25

$$W = \frac{1}{8}\{0.14 + 2.84 + 9.15 + 11.33 + 24.03 + 18.96 + 17.71 + 19.25\} = 12.93.$$

$$W_q = \frac{1}{8}\{0 + 0 + 0 + 5.54 + 10.83 + 16.63 + 16.48 + 12.25\} = 7.72.$$

TABEL I: KANSEN STANDAARD NORMALE VERDELING

In onderstaande tabel staan de getallen $\mathbb{P}[0 \leq \underline{z} \leq z]$ voor $z = 0.00, 0.01, \dots, 3.09$.

Voorbeeld: $\mathbb{P}[0 \leq \underline{z} \leq 1.56] = 0.4406$ (zie de rij van 1.5 en de kolom van .06).

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2375	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4191	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4805	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4872	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

TABEL II: OVERSCHRIJDINGSKANSEN VAN DE STUDENT-VERDELING

Laat $Z(n)$ een Student-verdeling hebben met n vrijheidsgraden.

In deze tabel staat $t_\alpha(n)$, waarbij $\mathbb{P}[Z(n) \geq t_\alpha(n)] = \alpha$ voor $\alpha = 0.1, 0.05, 0.025, 0.01$ en 0.005 , en voor $n = 1, 2, \dots, 30, 40, 60$ en ∞ .

Voorbeeld: $t_{0.025}(14) = 2.145$, want $\mathbb{P}[Z(14) \geq 2.145] = 0.025$ (rij $n = 14$ en kolom $\alpha = 0.025$).

	.1	.05	.025	.01	.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.363	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.797	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

TABEL III: OVERSCHRIJDINGSKANSEN VAN DE CHI-KWADRAAT-VERDELING

Laat $Z(n)$ een Chi-kwadraat-verdeling hebben met n vrijheidsgraden.

In deze tabel staat $\chi_\alpha^2(n)$, waarbij $\mathbb{P}[Z(n) \geq \chi_\alpha^2(n)] = \alpha$ voor $\alpha = 0.990, 0.975, 0.950, 0.900, 0.500, 0.100, 0.050, 0.025$ en 0.010 , en voor $n = 1, 2, \dots, 30, 40, 60$ en 80 .

Voorbeeld: $\chi_{0.025}^2(14) = 26.119$, want $\mathbb{P}[Z(14) \geq 26.119] = 0.025$ (rij $n = 14$ en kolom $\alpha = 0.025$).

	.990	.975	.950	.900	.500	0.100	0.050	0.025	0.010
1	0.000	0.000	0.004	0.016	0.455	2.706	3.844	5.023	6.635
2	0.020	0.051	0.103	0.211	1.386	4.605	5.991	7.378	9.210
3	0.115	0.216	0.352	0.584	2.366	6.251	7.815	9.348	11.345
4	0.297	0.484	0.711	1.064	3.357	7.779	9.488	11.143	13.277
5	0.554	0.831	1.145	1.610	4.351	9.236	11.071	12.833	15.086
6	0.872	1.237	1.635	2.204	5.348	10.645	12.592	14.449	16.812
7	1.239	1.690	2.167	2.833	6.346	12.017	14.067	16.013	18.475
8	1.647	2.180	2.733	3.490	7.344	13.362	15.508	17.535	20.090
9	2.088	2.700	3.325	4.168	8.343	14.684	16.919	19.023	21.666
10	2.558	3.247	3.940	4.865	9.342	15.987	18.307	20.483	23.209
11	3.053	3.816	4.575	5.578	10.341	17.275	19.675	21.920	24.725
12	3.571	4.408	5.226	6.304	11.340	18.549	21.026	23.337	26.217
13	4.107	5.009	5.892	7.042	12.340	19.812	22.362	24.736	27.688
14	4.660	5.629	6.571	7.790	13.340	21.064	23.645	26.119	29.141
15	5.229	6.262	7.261	8.547	14.339	22.307	24.996	27.488	30.578
16	5.812	6.908	7.962	9.312	15.339	23.542	26.296	28.845	32.000
17	6.408	7.564	8.672	10.085	16.338	24.769	27.587	30.191	33.409
18	7.015	8.231	9.390	10.865	17.388	25.989	28.869	31.526	34.409
19	7.623	8.907	10.117	11.651	18.338	27.204	30.143	32.852	36.191
20	8.260	9.591	10.851	12.443	19.337	28.412	31.410	34.170	37.566
21	8.897	10.282	11.591	13.240	20.337	29.615	32.671	35.479	38.932
22	9.542	10.982	12.338	14.042	21.337	30.813	33.924	36.781	40.289
23	10.196	11.689	13.091	14.848	22.377	32.007	35.173	38.076	41.638
24	10.856	12.401	13.848	15.659	23.337	33.196	36.415	39.364	42.980
25	11.524	13.120	14.611	16.473	24.377	34.382	37.653	40.647	44.314
26	12.198	13.844	15.379	17.292	25.336	35.563	38.885	41.923	45.642
27	12.879	14.573	16.151	18.114	26.336	36.741	40.113	43.194	46.963
28	13.565	15.308	16.928	18.939	27.336	37.916	41.337	44.461	48.278
29	14.266	16.047	17.708	19.768	28.336	39.088	42.557	45.722	49.588
30	14.954	16.791	18.493	20.599	29.336	40.256	43.773	46.979	50.899
40	22.164	24.433	26.509	29.051	39.335	51.805	55.759	59.342	63.691
60	37.485	40.482	43.188	46.459	59.335	74.397	79.082	83.298	88.379
80	53.540	57.153	60.392	64.278	79.334	96.578	101.879	106.629	112.329

TABEL IV: ASELECTE GETALLEN VAN 5 CIJFERS

In onderstaande tabel staan 200 aselecte getallen van 5 cijfers (lees ze regel voor regel).

09656	96657	64842	49222	49506	10145	48555	23505	90430	04180
24712	55799	60857	73479	33581	17360	30406	05842	72044	90764
07202	96341	23699	76171	79126	04512	15426	15980	88898	06358
84575	46820	54083	43918	46989	05379	70682	43081	66171	38942
38144	87037	46626	70529	27918	34191	98668	33482	43998	75733
48048	56349	01986	29814	69800	91609	65374	22928	09704	59343
41936	58566	31276	19952	01352	18834	99596	09302	20087	19063
73391	9406	03822	81845	76158	41352	40596	14325	27020	17546
57580	08954	73554	28698	29022	11568	35668	59906	39557	27217
92646	41113	91411	52615	69302	86419	61224	41936	56939	27816
07118	12707	35622	81485	73354	49800	05648	60805	28898	60933
57842	57831	24130	75408	83784	64307	91620	40810	06539	70387
65078	44981	81009	33697	98324	46928	34198	96032	98426	77488
04294	96120	67629	55265	26248	40602	25566	12520	89785	93932
48381	06807	43775	09708	73199	53406	02910	83292	59249	18597
00459	62045	19249	67095	22752	24636	16965	91836	00582	46721
38824	81681	33323	64086	55970	04849	24819	20749	51711	86173
91465	22232	02907	01050	07121	53536	71070	26916	47620	01619
50874	00807	77751	73952	03073	69063	16894	85570	81746	07568
266644	75871	15618	50310	72610	66205	82640	88205	73453	90232

TABEL V: ASELECTE TREKKINGEN UIT DE NORMALE VERDELING

In onderstaande tabel staan 240 aselecte trekkingen uit de standaard normale verdeling, afgerond op 4 cijfers na de komma (lees de getallen regel voor regel).

-0.3817	1.7309	0.1020	0.1781	-2.1976	0.2756	0.8807	-0.0815
0.9479	0.8028	-1.4627	-0.0787	0.9825	-0.9018	0.1992	1.2393
-0.8749	-0.6252	-0.1124	0.5100	0.3425	-2.5194	0.7917	-0.6435
-0.8305	0.5140	1.0899	1.1004	-0.3905	-0.0751	0.2134	0.2637
0.0484	0.4427	0.7435	0.1946	1.1059	-0.7671	1.6726	-2.3685
1.9877	-0.3445	0.2755	0.3305	-1.2995	0.5384	0.8722	-1.0991
0.5924	-1.0997	-0.8110	1.5247	0.6916	-0.2860	-0.0646	0.9836
-0.8654	0.2936	-0.6669	-2.7949	1.2422	3.2860	1.8091	-0.1199
-0.9951	-1.2879	1.2767	-0.5209	-0.4755	-0.4369	1.7016	-0.8645
-0.5770	0.6983	0.9749	1.9517	0.5771	-0.8968	1.0238	-1.8262
-2.2935	-0.2379	0.4626	-0.5964	-0.8931	0.7290	-1.7184	-0.8512
-1.0430	-0.5693	0.7397	0.0578	-0.8564	0.0379	1.1788	-1.5122
-1.2791	0.3306	0.9229	0.5169	0.2863	-0.2170	0.7516	-0.6194
0.7882	-1.8403	1.1957	-0.0081	-0.3016	0.2164	-0.9733	-1.2938
-1.1274	-0.8729	0.6601	-1.2445	1.2535	0.1542	0.3109	-0.2190
1.0996	-0.4117	-0.3625	-0.9987	-1.0937	0.6487	2.0155	0.2707
1.5944	-0.9749	-0.0864	-0.9278	-0.3483	-1.1420	0.0262	1.7378
-0.0644	1.4343	0.9960	0.3269	0.2443	0.5603	1.9258	0.5536
-1.0949	0.6032	-1.4501	0.4264	-0.6752	0.0338	-0.4326	-1.0698
-1.6900	0.3524	0.5440	-0.4991	-0.2465	2.2318	-1.3405	-0.5392
1.6935	1.1556	0.2844	0.3268	0.1115	-0.8292	1.0769	-1.4394
0.4225	-0.1589	0.2875	0.1739	0.3121	-0.4311	0.3326	-0.0997
0.1986	0.1609	0.4360	1.2305	0.3443	1.5596	0.3378	-1.7689
2.3660	-0.5133	-0.6426	0.3270	-0.6778	0.7603	0.5787	0.4870
0.4032	0.6988	-0.3843	0.2841	1.5372	-0.6841	0.7115	-0.7106
0.7738	0.5707	-0.0395	0.3851	-0.1621	-1.9569	1.6740	0.8431
1.2604	-0.6320	0.9049	-1.3804	0.7392	0.6756	-0.4579	-1.3956
0.3706	-1.0403	0.8779	-0.4107	-0.4386	1.7108	-0.4503	-0.6238
0.5754	1.6640	0.0940	0.2241	-0.4473	0.6381	0.7867	-2.5127
-0.3218	2.3873	-0.6108	1.1309	1.8718	0.8949	0.0993	-0.4548

A.3 Hoofdstuk 7

Vraag 7.1

Zij x_n het aantal dagen dat aan vak n wordt besteed, $p_n(x_n)$ de schatting van het cijfer als x_n dagen aan vak n wordt besteed en s het aantal dagen dat nog gestudeerd kan worden. Laat $f_n(s)$ de hoogst mogelijke som van de te verwachten tentamencijfers van de vakken $n, n+1, \dots, 4$ zijn als er nog s dagen gestudeerd kan worden. Dan is de recursie:

$$f_n(s) = \max \{p_n(x_n) + f_{n+1}(s - x_n) \mid 1 \leq x_n \leq \min(s, 4); s - x_n \geq 4 - n\}.$$

$n = 4$:

$$f_4(s) = \max \{p_4(x_4) \mid 1 \leq x_4 \leq \min(s, 4)\}.$$

s	$f_4(s)$	x_4^*
1	6	1
2	7	2
3	9	3
4	9	4

$n = 2$:

$$f_2(s) = \max \{p_2(x_2) + f_3(s - x_2)\},$$

met $1 \leq x_2 \leq \min(s, 4); s - x_2 \geq 2$.

	x_2					
s	1	2	3	4	$f_2(s)$	$x_2^*(s)$
3	13				13	1
4	15	13			15	1
5	18	15	14		18	1
6	19	18	16	17	19	1

$n = 3$:

$$f_3(s) = \max \{p_3(x_3) + f_4(s - x_3)\},$$

met $1 \leq x_3 \leq \min(s, 4); s - x_3 \geq 1$.

	x_3					
s	1	2	3	4	$f_3(s)$	$x_3^*(s)$
2	8				8	1
3	9	10			10	2
4	11	11	13		13	3
5	11	11	14	14	14	3

$n = 1$:

$$f_1(s) = \max \{p_1(x_1) + f_2(s - x_1)\},$$

met $1 \leq x_1 \leq \min(s, 4); s - x_1 \geq 3$.

	x_1					
s	1	2	3	4	$f_1(s)$	$x_1^*(s)$
7	22	23	21	20	23	2

De optimale oplossing is:

$x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ en $x_4 = 1$ met 23 als som van de te verwachten cijfers.

Vraag 7.2

Analoog aan Voorbeeld 7.4 krijgen we:

$$f_n(1) = \min_{x_n \geq 0} \{p_n(x_n) + (\frac{1}{3})^{x_n} f_{n+1}(1)\}, \quad n = 2, 1 \text{ met } f_3(1) = 1600.$$

$$n = 2: f_2(1) = \min_{x_2 \geq 0} \{p_2(x_2) + (\frac{1}{3})^{x_2} \cdot 1600\}.$$

x_2	0	1	2	3	4	$f_2(1)$	$x_2^*(1)$
	1600	933	677	759	820	677	2

$$n = 1: f_1(1) = \min_{x_1 \geq 0} \{p_1(x_1) + (\frac{1}{3})^{x_1} \cdot f_2(1)\}.$$

x_1	0	1	2	3	4	$f_1(1)$	$x_1^*(1)$
	677	626	575	625	708	575	2

De optimale oplossing is dus: $x_1^* = 2$ en $x_2^* = 2$ met verwachte kosten 575 (de getallen zijn afgerond op gehele getallen). De kans op een goed exemplaar is $1 - \left\{\frac{1}{3}\right\}^4 = \frac{80}{81}$.

Vraag 7.3

Analoog aan Voorbeeld 7.5 krijgen we:

$$f_n(s) = \max_{0 \leq x_n \leq s; x_n \leq 5-s} \left\{ \frac{1}{3} f_{n+1}(s-x_n) + \frac{2}{3} f_{n+1}(s+x_n) \right\}, \quad 1 \leq n \leq 5 \text{ met } f_6(s) = \begin{cases} 1 & \text{als } s = 5 \\ 0 & \text{als } s \neq 5 \end{cases}$$

$n = 5$:

s	$f_5(s)$	x_5^*
0	0	0
1	0	0
2	0	0
3	$\frac{2}{3}$	2
4	$\frac{2}{3}$	1
5	1	0

$n = 4$:

	x_4						
s	0	1	2	3	4	$f_4(s)$	$x_4^*(s)$
0	0					0	0
1	0					0	0
2	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$			$\frac{4}{9}$	1
3	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$	0
4	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$	1
5	1					1	0

$n = 3$:

	x_3						
s	0	1	2	3	4	$f_3(s)$	$x_3^*(s)$
0	0					0	0
1	0	$\frac{8}{27}$				$\frac{8}{27}$	1
2	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{16}{27}$			$\frac{16}{27}$	2
3	$\frac{2}{3}$	$\frac{20}{27}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{20}{27}$	1
4	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{22}{27}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$	0
5	1					1	0

$n = 2$:

	x_2						
s	0	1	2	3	4	$f_2(s)$	$x_2^*(s)$
0	0					0	0
1	$\frac{8}{27}$	$\frac{32}{81}$				$\frac{32}{81}$	1
2	$\frac{16}{27}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{16}{27}$			$\frac{16}{27}$	0
3	$\frac{20}{27}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{62}{81}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{64}{81}$	1
4	$\frac{8}{9}$	$\frac{74}{81}$	$\frac{70}{81}$	$\frac{62}{81}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{74}{81}$	1
5	1					1	0

$n = 1$:

	x_1						
s	0	1	2	3	4	$f_1(s)$	$x_1^*(s)$
2	$\frac{16}{27}$	$\frac{160}{243}$	$\frac{124}{243}$			$\frac{160}{243}$	1

De kans om op 5 fiches uit te komen is dus $\frac{160}{243} \approx 0.658$. De optimale strategie is als volgt:

Zet eerst tweemaal 1 fiche in (als je tweemaal verliest is het spel uit). Bij 2x winst, dan zet je in derde ronde niets in, bij 1x winst in derde ronde inzet 2 (als je dan verliest is het spel uit). Na drie rondes heb je dan 4 fiches (of het spel is uit). In de vierde ronde zet je 1 fiche in: bij winst, dan ben je klaar en bij verlies zet je in de laatste ronde 2 in.

A.4 Hoofdstuk 8

Vraag 8.1

Dit Markov beslissingsprobleem heeft de volgende parameters:

$S = \{0, 1, \dots, N\}$; $A(N) = \{0, 1, \dots, N-1\}$, waarbij actie a de vervanging door een auto van a maanden is; voor $0 \leq i \leq N-1$: $A(i) = \{*\} \cup A(N)$, waarbij $*$ de actie niet-vervangen is.

$$p_{ij}(*) = \begin{cases} 1 - p_i & j = i + 1 \\ p_i & j = N \\ 0 & j \neq i + 1, N \end{cases} \quad r_i(*) = -c_i, \quad 0 \leq i \leq N-1$$

$$p_{ij}(a) = \begin{cases} 1 - p_a & j = a + 1 \\ p_a & j = N \\ 0 & j \neq a + 1, N \end{cases} \quad r_i(a) = t_i - b_a - c_a, \quad 0 \leq i \leq N, \quad 0 \leq a \leq N-1$$

Vraag 8.2

Voor iedere t , heeft een niet-gerandomiseerde Markov beslissingsregel precies één positieve actie in iedere toestand $\pi_{i_t a_t}^t$ $i_t \in S$, $a_t \in A(i_t)$. Het aantal beslissingsregels is dus $m_1 \cdot m_2 \cdots m_N$.

Dientengevolge is het aantal niet-gerandomiseerde Markov strategieën in een eindige horizon model met T perioden: $\{m_1 \cdot m_2 \cdots m_N\}^T$.

Vraag 8.3

De toestandsruimte S bestaat uit de knooppunten: $S = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_p$.

De actieverz. $A(i)$ voor een toestand $i \in V_k$ correspondeert met de eindpunten van de in toestand i beginnende pijlen, d.w.z. voor $i \in V_k$, $A(i) = \{j \in V_{k+1} \mid (i, j) \text{ is een pijl van het netwerk}\}$.

Als actie j wordt gekozen in toestand i , dan is $p_{ij}(j) = 1$, $p_{il} = 0$ voor $l \neq j$, en de lengte wordt als kosten beschouwd, ofwel: $r_i(j) = -l_{ij}$.

Het aantal perioden $T = p - 1$. Als we starten in toestand 1 op tijdstip $t = 1$, dan heeft ieder pad van knooppunt 1 naar knooppunt N $p - 1$ stappen, dus de duur van het proces, en de lengte van het pad correspondeert met het tegengestelde van de totale opbrengst van de bijbehorende strategie. M.a.w., het probleem om het kortste pad van knooppunt 1 naar knooppunt N te vinden kan worden opgelost als een Markov beslissingsprobleem over een eindige horizon.

Vraag 8.5

Iteratie 1

Het stelsel $L_f x = x$ wordt:

$$x_1 = 1 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 \right\}; \quad x_2 = 2 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{3} x_1 + \frac{1}{3} x_2 \right\}.$$

The solution is: $v^\alpha(f) = \left(\frac{32}{13}, \frac{44}{13} \right)$.

$$s_{11}(f) = 0, \quad s_{12}(f) = -\frac{23}{26}; \quad s_{21}(f) = 0, \quad s_{22}(f) = \frac{2}{13}.$$

$$A(1, f) = \emptyset, \quad A(2, f) = \{2\}. \quad g(1) = 1, \quad g(2) = 2.$$

$$A(1) = \{1\}, \quad A(2) = \{1, 2\}. \quad f(1) = 1, \quad f(2) = 2.$$

Iteratie 2

Het stelsel $L_f x = x$ wordt:

$$x_1 = 1 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 \right\}.$$

$$x_2 = 2 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} x_1 + \frac{2}{3} x_2 \right\}.$$

The solution is: $v^\alpha(f) = \left(\frac{28}{11}, \frac{40}{11} \right)$.

$$s_{11}(f) = 0, \quad s_{21}(f) = -\frac{2}{11}, \quad s_{22}(f) = 0.$$

$$A(1, f) = \emptyset, \quad A(2, f) = \emptyset.$$

f^∞ with $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ is een optimale strategie.

Vraag 8.6

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,a)} r_i(a) x_i^\pi(a) &= \sum_{(i,a)} r_i(a) \left\{ \beta^T \{I - \alpha P(\pi)\}^{-1} \right\}_i \cdot \pi_{ia} \\
&= \sum_i \left\{ \beta^T \{I - \alpha P(\pi)\}^{-1} \right\}_i \cdot r_i(\pi) = \beta^T \{I - \alpha P(\pi)\}^{-1} r(\pi) = \beta^T v^\alpha(\pi^\infty).
\end{aligned}$$

Vraag 8.4

Het hierbij behorende duale LP-probleem luidt (neem $\beta_j = \frac{1}{4}$, $1 \leq j \leq 4$):

maximaliseer $x_2 + 2x_3 + 2x_4$

onder de voorwaarden:

$$\begin{array}{rccccrcrcl}
x_1 & & & + & \frac{1}{2}y_1 & - & \frac{1}{8}y_2 & - & \frac{1}{3}y_3 & - & \frac{1}{4}y_4 & = & \frac{1}{4} \\
& x_2 & & - & \frac{1}{2}y_1 & + & \frac{7}{8}y_2 & - & \frac{1}{3}y_3 & - & \frac{1}{8}y_4 & & \frac{1}{4} \\
& & x_3 & & & - & \frac{1}{2}y_2 & + & \frac{2}{3}y_3 & - & \frac{1}{2}y_4 & = & \frac{1}{4} \\
& & & x_4 & & - & \frac{1}{4}y_2 & & & + & \frac{7}{8}y_4 & = & \frac{1}{4} \\
& & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4 & \geq & 0
\end{array}$$

De optimale oplossing van dit probleem is:

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{7}{12}$, $x_4 = \frac{5}{12}$; $y_1 = \frac{2}{3}$; $y_2 = \frac{2}{3}$; $y_3 = y_4 = 0$. Hieruit volgt de optimale strategie: in de toestanden 3 en 4 stoppen we en in de toestanden 1 en 2 gaan we door. De verwachte totale opbrengst volgt uit het LP-probleem en is voor de verschillende begintoestanden als volgt: $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 2$.

Vraag ??

Omdat volgens Stelling ?? de matrix D voldoet aan $D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{i-1} (P^k - P^*)$,

is het voldoende om te laten zien dat de rijssommen van iedere $(P^k - P^*)$ gelijk zijn aan 0.

De rijssommen van zowel P^k als van P^* zijn 1, dus van het verschil zijn de rijssommen 0.

Vraag ??

De optimaliteitsvergelijking luidt:

$$x + y_1 = \max\{5 + \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2, 10 + y_2\}; \quad x + y_2 = -1 + \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2.$$

Het is direct duidelijk dat het model irreducibel is.

Omdat y op een constante na bepaald is, kunnen we y_2 gelijk aan 0 nemen, waarmee de vergelijkingen worden:

$$x + y_1 = \max\{5 + \frac{1}{2}y_1, 10\}; \quad x = -1 + \frac{1}{3}y_1.$$

Door de twee mogelijkheden in de eerste vergelijking beide te onderzoeken krijgen we:

$$\text{als } x + y_1 = 5 + \frac{1}{2}y_1 : x = \frac{7}{5}; y_1 = \frac{36}{5}; y_2 = 0;$$

$$\text{als } x + y_1 = 10 : x = \frac{7}{4}; y_1 = \frac{33}{4}; y_2 = 0.$$

De hoogste waarde van x geeft de oplossing: $x = \frac{7}{4}$; $y_1 = \frac{33}{4}$; $y_2 = 0$.

Vraag ??

Merk allereerst op dat het model irreducibel is.

Iteratie 1:

$$\text{Het stelsel is: } \begin{cases} x + \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{4}y_2 - \frac{1}{4}y_3 = 1 \\ x - \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 = 2 \\ x - \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_3 = 1 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

De oplossing van het stelsel is: $x = \frac{19}{15}$, $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{22}{15}$, $y_3 = -\frac{6}{15}$.

$B(1, f) = B(2, f) = \emptyset$, $B(3, f) = \{2\}$. Neem $f(1) = f(2) = 1$, $f(3) = 2$.

Iteratie 2:

$$\text{Het stelsel luidt: } \begin{cases} x + \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{4}y_2 - \frac{1}{4}y_3 = 1 \\ x - \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 = 2 \\ x - \frac{1}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 = 2 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

De oplossing van het stelsel is: $x = \frac{18}{11}$, $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{8}{11}$, $y_3 = \frac{20}{11}$.

$B(1, f) = B(2, f) = B(3, f) = \emptyset$: f^∞ met $f(1) = f(2) = 1$, $f(3) = 2$ is een optimale strategie en de waarde is $\frac{18}{11}$.

Vraag ??

Het LP-probleem (??) luidt:

$\max\{1 \cdot x_1(1) + 0 \cdot x_1(2) + 2 \cdot x_2(1) + 1 \cdot x_2(2) + 1 \cdot x_3(1) + 2 \cdot x_3(2)\}$ onder de voorwaarden:

$$x_1(1) + x_1(2) = \frac{1}{2}x_1(1) + \frac{1}{3}x_1(2) + \frac{1}{2}x_2(1) + \frac{1}{3}x_2(2) + \frac{2}{3}x_3(1);$$

$$x_2(1) + x_2(2) = \frac{1}{4}x_1(1) + \frac{1}{3}x_1(2) + \frac{1}{2}x_2(1) + \frac{2}{3}x_2(2) + \frac{1}{3}x_3(2);$$

$$x_3(1) + x_3(2) = \frac{1}{4}x_1(1) + \frac{1}{3}x_1(2) + \frac{1}{3}x_3(1) + \frac{2}{3}x_3(2);$$

$$x_1(1) + x_1(2) + x_2(1) + x_2(2) + x_3(1) + x_3(2) = 1;$$

$$x_1(1), x_1(2), x_2(1), x_2(2), x_3(1), x_3(2) \geq 0.$$

De optimale oplossing van dit probleem is:

$$x_1(1) = \frac{4}{11}, x_1(2) = 0, x_2(1) = \frac{4}{11}, x_2(2) = 0, x_3(1) = 0, x_3(2) = \frac{3}{11}; \text{ waarde optimum} = \frac{18}{11}.$$

Hieruit volgt de optimale strategie: $f_*(1) = f_*(2) = 1$, $f_*(3) = 2$; $\phi = \frac{18}{11}$.

Vraag ??

Iteratie 1:

$$y_1(1) = 1, y_1(2) = 0, y_2(1) = 2; y_2(2) = 1, y_3(1) = 1, y_3(2) = 2; g = 2;$$

$$w_1 = -1, w_2 = 0, w_3 = 0; f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 2; u = 0, l = -1; v = (-1, 0, 0).$$

Iteratie 2:

$$y_1(1) = \frac{1}{2}, y_1(2) = -\frac{1}{3}, y_2(1) = \frac{3}{2}; y_2(2) = \frac{2}{3}, y_3(1) = \frac{1}{3}, y_3(2) = 2; g = 2;$$

$$w_1 = -\frac{3}{2}, w_2 = -\frac{1}{2}, w_3 = 0; f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 2; u = 0, l = -\frac{1}{2}; v = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0).$$

Iteratie 3:

$$y_1(1) = \frac{1}{8}, y_1(2) = -\frac{2}{3}, y_2(1) = 1; y_2(2) = \frac{1}{6}, y_3(1) = 0, y_3(2) = \frac{11}{6}; g = \frac{11}{6};$$

$$w_1 = -\frac{41}{24}, w_2 = -\frac{5}{6}, w_3 = 0; f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 2; u = 0, l = -\frac{1}{3}; v = (-\frac{41}{24}, -\frac{5}{6}, 0).$$

Iteratie 4:

$$y_1(1) = -\frac{1}{16}, y_1(2) = -\frac{61}{72}, y_2(1) = \frac{35}{48}; y_2(2) = -\frac{1}{8}, y_3(1) = -\frac{5}{36}, y_3(2) = \frac{31}{18}; g = \frac{31}{18};$$

$$w_1 = -\frac{257}{144}, w_2 = -\frac{143}{144}, w_3 = 0; f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 2; u = 0, l = -\frac{23}{144};$$

$$u - v = \frac{23}{144} \approx 0.16.$$

$f(1) = f(2) = 1, f(3) = 2$ is een 0.2-optimale strategie; $\frac{473}{288} \approx 1.64$ een 0.1-approximatie van ϕ .

Bijlage B

Index

Index

- simulatie
 - discrete-event simulatie, 35
- aankomstproces, 1
- aankomstsnelheid, 2
- achterwaartse recursie, 79
- aselecte getallen, 45
 - pseudo aselecte getallen, 45
- bedieningsintensiteit, 9
- bedieningsproces, 1
- blokkeingskans, 1
- blokkeringskans, 13
- deterministische beslisregel, 74
- discrete-event simulatie, 35
- dynamische programmering, 59
- Erlang verliesformule, 13
- Erlang wachtformule, 12
- Erlang-verdeling, 11
- FIFO, 3
- formule van Little, 4
- gesloten netwerk van wachtrijen, 26
- inverse transformatie, 45
- Jackson netwerk, 23
- klantenbron, 3
 - eindige klantenbron, 3
- Little, 4
- M/G/1-model, 17
- M/M/1-model, 9
- M/M/s-model, 11
- Markov beslissingsketens, 73
 - strategie verbetering, 88
 - verdiscontering
 - lineaire programmering, 92
- mean-value algoritme, 27
- monotoon stopprobleem, 99
- Monte Carlo simulatie, 35
- netwerken van wachtrijen, 21
 - gesloten systeem, 26
 - Jackson netwerk, 23
 - open systeem, 23
- open netwerk van wachtrijen, 23
- PASTA, 6
- Poissonproces, 2
- Pollaczek-Khintchine, 18
- pseudo aselecte getallen, 45
- regeneratief proces, 7
- regeneratietijd, 10
- rood-zwart casino model, 94
- simulatie, 35
 - Monte Carlo simulatie, 35
- steekproefgemiddelde, 36
- steekproefvariantie, 36
- strategie, 74
 - deterministisch, 75
 - Markov, 74
 - stationaire, 75
- superharmonisch, 92
- tandem wachtrij, 21
- validatie, 35

verbeterende acties, 88
verdisconteringsfactor, 102
verificatie, 35
voorraad model, 73

waardevector, 78
wachtrij, 1
 netwerken van wachtrijen, 21
wachtijdtheorie, 1
werklast, 18