Gedeeltelijke uitwerkingen tentamen algebra 1

26 juni 2014, 10:00 – 13:00

Het overschrijven van deze uitwerkingen met andere getallen geeft geen enkele garantie voor toekomstige tentamens.

- Je mag de syllabus en aantekeningen gebruiken, maar geen rekenmachine. Je mag opgaven 2.46, 2.49 en 8.13 gebruiken.
- Bewijs steeds je antwoord en noem de resultaten die je gebruikt.
- Het tentamen bestaat uit 6 opgaven die elk 15 punten waard zijn en het tentamencijfer is punten/10+1.
- Schrijf op het tentamen of je uit Leiden of Delft komt, en schrijf er het studentnummer van je eigen universiteit op.

Opgave 1. Laat $\sigma_1 = (34)(123)(34)(45)$, $\sigma_2 = (12)(345)(56)(78) \in S_9$.

(a) Schrijf σ_1 en σ_2 in disjunctecykelnotatie en bepaal de orde van σ_1 en de orde van σ_2. [8pt]

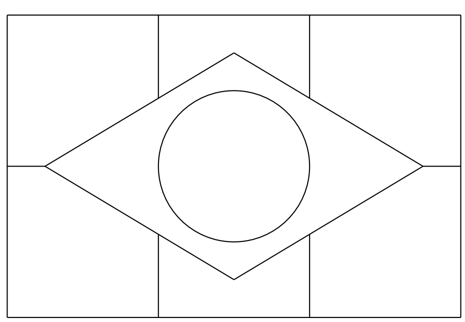
(b) Zijn σ_1 en σ_2 geconjugeerd? [7pt]

Oplossing

(a) $\sigma_1 = (1245)$ is een vier-cykel en heeft dus orde 4.
$\sigma_2 = (12)(3456)(78)$ heeft cykeltype $(4, 2, 2, 1)$ en dus wegens opgave 2.49 orde $\mathrm{kgv}(4, 2, 2, 1) = 4$.

(b) Ze hebben ongelijk cykeltype en zijn dus wegens opgave 2.46 niet geconjugeerd.

Opgave 2. Speciaal voor een groot sportevenement ontwierp een bekende supermarktketen de *Riorechthoek*, om bij elke besteding van tien euro aan de klant mee te geven. Een *Riorechthoek* is een rechthoekige vlag met 8 vakken zoals op het plaatje. [15pt]



De cirkelschijf wordt blauw gekleurd, de rest van de ruit geel, en voor de overige zes vakken zijn 10 tinten groen beschikbaar. Twee *Riorechthoeken* heten "hetzelfde" als ze door vlakke rotaties en/of spiegelingen in elkaar overgevoerd kunnen worden. Bepaal het aantal "echt verschillende" *Riorechthoeken*.

Oplossing. Zij X de verzameling toegestane kleuringen van een vaste Riorechthoek in het vlak, dus $\#X = 10^6$, en G de symmetriegroep van een niet-ingekleurde Riorechthoek. Er wordt gevraagd om het aantal $\#G\backslash X$ banen van X onder de werking van G, en daarvoor gebruiken we de banenformule

$$\#G\backslash X = \frac{1}{\#G} \sum_{g\in G} \#\{\text{vaste punten van } g \text{ in } X\}.$$

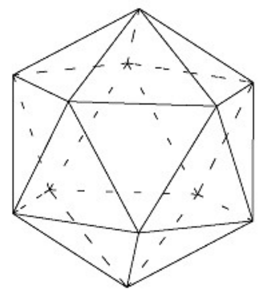
Er geldt $G = V_4 = \{\mathrm{id}, \rho_{180^\circ}, \sigma_x, \sigma_y\}$. Informeel gezegd is het aantal vaste punten van g gelijk aan tien tot de macht het aantal keren dat we een kleur mogen kiezen om een g-invariante kleuring te krijgen, dus:
10^6 voor id
10^3 voor ρ_{180°
10^3 voor σ_x
10^4 voor σ_y.
Het antwoord is dus $1012000/4 = 253000$.

Opgave 3. Bepaal de rest bij deling door 41 van het getal $2^{2014^{2013}}$. [15pt]
Je mag zonder bewijs gebruiken: $2^{10} \equiv -1 \bmod 41$ (maar het hoeft niet).
Waarschuwing: $x^{y^z} = x^{(y^z)} \neq (x^y)^z = x^{y\cdot z}$.

Antwoord. 16
Opmerkingen met betrekking tot veel-gemaakte fouten.

- Het is volstrekt onzinnig om 2014^{2013} modulo 41 te bekijken.
- Voordat je de stelling van Euler toepast: controleer de voorwaarden!
- De getallen 2014, 14, 4, 40, 20, 10 zijn allemaal even. Als je een tweetal a, b van deze getallen neemt, dan heb je dus *niet* $\mathrm{ggd}(a, b) = 1$.
- De hint kan je gebruiken om $2^{24} \bmod 41$ te vereenvoudigen tot $(-1)^2 2^4 \bmod 41$.
  Je kan de hint ook gebruiken om te bewijzen dat je 2014^{2013} alleen modulo 20 hoeft te weten.
  Als je zomaar 2014^{2013} reduceert modulo 10, dan kom je op het verkeerde antwoord uit.
- Als je denk dat de Chinese reststelling geeft dat $(a \bmod mn) = (a \bmod m)\cdot(a \bmod n)$ (met een vermenigvuldigpunt), dan heb je de stelling helemaal verkeerd begrepen. Kies bijvoorbeeld $a = 24, m = 8, n = 5$, en merk op $24 \not\equiv 0 \cdot 4 \equiv 0 \bmod 40$.

Opgave 4. De icosaëder is het regelmatige twintigvlak, zie figuur.



Deze heeft twaalf hoekpunten. Zij G de symmetriegroep van de icosaëder.

(a) Geef de orde van de stabilisator in G van een hoekpunt. Hierbij volstaat een *beknopte* uitleg waarom dit antwoord correct is. [8pt]

(b) Bepaal de orde van G. Hint: gebruik (a). [7pt]

Antwoord

(a) Het antwoord is 10. Je kan dit antwoord motiveren door de vijfhoek te herkennen rond een hoekpunt, zoals in Voorbeeld 5.4 met de driehoek gedaan wordt. Merk op $D_5 \not\cong S_5$, dus D_5 is goed, maar S_5 is fout.

(b) Hier is het belangrijk op te merken dat de baan van een hoekpunt gelijk is aan de verzameling van alle hoekpunten wegens de regelmaat van het regelmatige twintigvlak. Het aantal hoekpunten is gegeven, dus Stelling 5.3 geeft het antwoord: 12 maal het antwoord van deel (a).

Opgave 5.

(a) Zij $n \geq 2$ geheel. Laat zien: $\#\mathrm{Hom}(S_n, C_6) = 2$. [8pt]

(b) Zij D_{12} de diëdergroep van 24 elementen. Laat zien: D_{12} heeft precies drie ondergroepen van orde 12. Hint: dit heeft iets te maken met homomorfismen naar C_2. [7pt]

Beknopte oplossing

(a) Met Gevolg 8.6 (of de zin erboven in combinatie met het bewijs van 8.6) volgt dat er een bijectie is

$$\mathrm{Hom}(S_n, C_6) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}((S_n)_{\mathrm{ab}}, C_6)$$

met $(S_n)_{\mathrm{ab}} \cong C_2$. Een homomorfisme van $C_m = \langle g \rangle$ naar een groep G wordt uniek vastgelegd door het beeld van g, waarvoor precies de elementen van orde een deler van m zijn toegestaan. Dus $\mathrm{Hom}(S_n, C_6)$ is gelijk aan het aantal elementen van C_6 van orde 1 of 2, en dat zijn er twee.

(b) Een ondergroep van D_{12} heeft orde 12 precies als ze index 2 heeft. En ondergroepen van index 2 zijn normaal (Stelling 5.10) en dus kernen van homomorfismen. Dit zijn dan surjectieve homomorfismen naar C_2 wegens 4.9. We hebben dus bewezen dat er een surjectieve afbeelding als volgt is:

$$\{\text{surjectieve homomorfismen } D_{12} \to C_2\} \to \{\text{ondergroepen van index 2 in } D_{12}\}$$
$$f \mapsto \ker(f).$$

Het bewijs wordt afgemaakt door te laten zien dat deze afbeelding injectief is en door (bijvoorbeeld analoog aan deel (a) met behulp van opgave 8.13) te bewijzen dat geldt

$$\#\mathrm{Hom}(D_{12}, C_2) = 4 \quad \text{(waarvan 1 niet-surjectief)}.$$

Opgave 6. Zij G een groep die transitief werkt op een verzameling X. Bewijs dat de stabilisatoren van alle elementen van X gelijk zijn dan en slechts dan als de stabilisator van één element normaal is in G. [15pt]

Oplossing. Belangrijke eerste opmerking: de werking is transitief, dus er is een $x \in X$. We gaan bewijzen dat G_x normaal is, dan en slechts dan als voor alle $y \in X$ geldt $G_y = G_x$.

Merk op: de werking is transitief, dus alle $y \in X$ zijn van de vorm gx met $g \in G$. Het is dus voldoende te bewijzen dat G_x normaal is, dan en slechts dan als voor alle $g \in G$ geldt $G_{gx} = G_x$. Maar $G_{gx} = gG_xg^{-1}$ (pagina 58, net voor 5.3) en inderdaad is G_x (per definitie) normaal dan en slechts dan als voor alle $g \in G$ geldt $gG_xg^{-1} = G_x$.