Tentamen algebra 1

Woensdag 24 juni 2015, 10:00 – 13:00

Snelliusgebouw B1 (extra tijd), B2, B3, 312

- Je mag de syllabus en aantekeningen gebruiken, maar geen rekenmachine. Je mag opgaven 2.46, 2.49 en 8.13 gebruiken. Verder geldt $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$ en $5 \cdot 13 \cdot 31 = 2015$.
- Bewijs steeds je antwoord en benoem de resultaten die je gebruikt.
- Het tentamen bestaat uit 5 opgaven die elk 9 punten waard zijn en het tentamencijfer is punten/5+1.
- Schrijf op het tentamen of je uit Leiden of Delft komt, en schrijf er het studentnummer van je eigen universiteit op.

Opgave 1. Zij $\sigma : \mathbf{Z}/35\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/35\mathbf{Z}$ gegeven door $\sigma(\overline{k}) = \overline{k} + \overline{4}$. Hier is σ een element van de groep $G = S(\mathbf{Z}/35\mathbf{Z})$ van permutaties van de verzameling $\mathbf{Z}/35\mathbf{Z}$ (hiervan hoef je het bewijs niet te geven).

(a) Bepaal de orde van σ. [1pt]
Antwoord: 35
Voorbeeld van een correct bewijs: σ^n is de afbeelding $\overline{k} \mapsto \overline{k} + \overline{4n}$. De orde van σ is de kleinste positieve n waarvoor $\sigma^n = \mathrm{id}$, en die is dus gelijk aan de kleinste positieve n waarvoor $4n$ een 35-voud is. 4 en 35 zijn copriem, dus dat geeft $n = 35$, dus de orde van σ is 35.
Alternatief: Voor wie bovenstaand inzicht niet heeft, het kan ook rechttoerechtaan met hard werk, namelijk door de permutatie σ in disjunctecykelnotatie uit te schrijven. Het is dan een 35-cykel, dus orde 35.

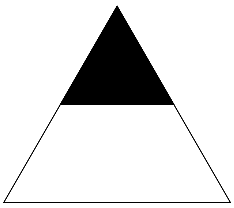
(b) Bepaal $\sigma^{2015^{2406}}(\overline{1})$. Waarschuwing: $x^{y^z} = x^{(y^z)} \neq (x^y)^z = x^{y \cdot z}$. [3pt]
Antwoord: $\overline{26}$
Opmerkingen met betrekking tot veelgemaakte fouten:

- De orde van σ is (een deler van) 35, dus het gaat om 2015^{2406} modulo 35. Dit blijkt 15 modulo 35 te zijn en $\sigma^{15}(\overline{1}) = \overline{1} + 15 \cdot \overline{4} = \overline{26}$.
- Om a^b mod n uit te rekenen kan je niet b mod n gebruiken.
- Zoals bovenaan het tentamen staat: benoem de stellingen die je gebruikt.
- Controleer de voorwaarden van de stellingen die je gebruikt.
- $b^0 \neq b$.
- $\sigma^n = \sigma \circ \sigma \circ \cdots \circ \sigma$, dus $\sigma^n(\overline{1})$ betekent iets heel anders dan $\sigma(\overline{1})^n$

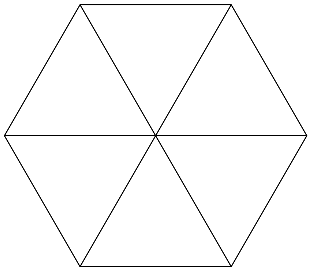
(c) Bepaal $\sigma^{24^{6^{2015}}}(\overline{1})$. [3pt]
Antwoord: $\overline{5}$ (zie boven voor opmerkingen)

(d) Zijn $\tau_1 = (123)(3245)(37)$ en $\tau_2 = (14)(123456)(15) \in S_8$ geconjugeerd? [2pt]
Antwoord: nee
Voorbeeld van een bewijs: De tekens zijn $\epsilon(\sigma_1) = 1 \cdot -1 \cdot -1 = 1$ en $\epsilon(\sigma_2) = -1 \cdot -1 \cdot -1 = -1$, dus de tekens zijn verschillend, dus de permutaties zijn niet geconjugeerd.
Opmerking: Geef je een bewijs met behulp van cykeltypes, gebruik dan de *disjuncte*cykelnotatie.

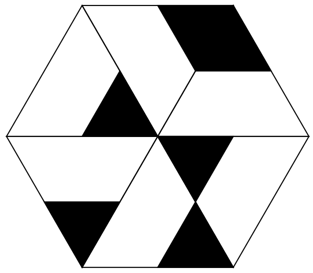
Opgave 2. Een *gerichte driehoek* is een gelijkzijdige driehoek waarvan een kwart zoals getekend in figuur 1 zwart is. [9pt]
Een *zwarte-witte zeshoek* maak je door één gerichte driehoek op elke driehoek in figuur 2 te leggen (in welke oriëntatie dan ook). Het is dus een zeshoek bestaande uit zes gerichte driehoeken. Figuur 3 is een voorbeeld van een zwart-witte zeshoek.
We noemen twee zwart-witte zeshoeken *hetzelfde* als ze door draaiing en/of spiegeling in elkaar overgevoerd kunnen worden. Hoeveel echt verschillende zwart-witte zeshoeken bestaan er?
Je mag je antwoord laten staan in een vorm die bij intikken in een rekenmachine het goede antwoord oplevert.



(figuur 1)



(figuur 2)



(figuur 3)

Antwoord: 74
Opmerkingen en veelgemaakte fouten:

- Zeg op welke verzameling X je de banenformule toepast.
- Zeg hoe je aan je aantal $\chi(g)$ van vaste punten onder g komt.
- Je kunt deze opgave zien als een inkleuring van figuur 2 in 3 kleuren, op 1 deel van het bewijs na als volgt.
  Een vast punt $z \in X$ onder de spiegeling σ_y in de y-as is per definitie een zwart-witte zeshoek z die onder spiegeling σ_y hetzelfde blijft. Bekijk de twee gerichte driehoeken die op de y-as liggen in zo'n z. Omdat $\sigma_y(z) = z$, veranderen deze twee driehoeken niet onder spiegeling in de y-as, en liggen deze dus symmetrisch om de y-as. In de zwart-witte zeshoek z wijzen deze twee driehoeken dus met de zwarte punt naar het midden van de zeshoek. De enige vrije keuze die je hebt is dus voor twee driehoeken (zeg die in het rechter halfvlak). Er geldt dus $\chi(\sigma_y) = 3^2$, niet $\chi(\sigma_y) = 3^4$ zoals het bij een driekleuring zou zijn. Het eindantwoord is daardoor niet 92, zoals bij een driekleuring, maar 74.
- Benoem de getallen. Voorbeeld: In de banenformule staat een som van 12 waarden van de vorm $\chi(g)$. Die kun je groeperen, omdat bijvoorbeeld voor twee rotaties om 1/3 slag de χ van deze rotaties hetzelfde is. Je krijgt dan zoiets als "$2 \cdot \chi$(rotatie 1/3 slag)" in de teller van de banenformule. Zeg tenminste zoiets als "2 rotaties om 1/3 slag, elk $\chi = 3^3$" voordat je $2 \cdot 3^3$ opschrijft.

Opgave 3. De voetbal is een veelvlak opgebouwd uit 12 zwarte regelmatige vijfhoeken en 20 witte regelmatige zeshoeken op zo'n manier dat in elk hoekpunt precies 1 vijfhoek en 2 zeshoeken bij elkaar komen. De voetbal is symmetrisch in alle gesuggereerde opzichten. Zij G de symmetriegroep van de voetbal.

(a) Bepaal de orde van de stabilisator en de lengte van de baan van een vijfhoek. Hierbij volstaat een *beknopte* uitleg waarom dit antwoord correct is. [3pt]
Antwoord: 10 en 12 in die volgorde, met korte uitleg: de stabilisator is in dit geval isomorf met de symmetriegroep van 1 vijfhoek (D_5, van orde 10), en de baan is de verzameling van vijfhoeken. Merk op dat een symmetriegroep per definitie bestaat uit alle symmetrieën, dus ook spiegelingen.

(b) Bepaal de orde van G. [2pt]
Oplossing: Gebruik de baanstabilisatorstelling

(c) Werkt G transitief op de verzameling ribben van de voetbal? [2pt]
Antwoord: Nee, een ribbe die aan een vijfhoek grenst wordt door geen enkele symmetrie gestuurd naar een ribbe die aan twee zeshoeken grenst.

(d) Werkt G trouw op de verzameling ribben van de voetbal? [2pt]
Antwoord: Ja (plus bewijs, zie onder)
Opmerkingen:

- Een werking van G op X is trouw dan en slechts dan als voor elke $g \in G$ geldt: als g triviaal werkt op X, dan geldt $g = e_G$. Hier is X de verzameling van ribben.
- Je kunt bijvoorbeeld als volgt bewijzen dat de werking trouw is. Stel $g \in G$ werkt triviaal op de verzameling ribben. Kies twee aangrenzende ribben r_1, r_2. Laat S het snijpunt van de ribben zijn en M het middelpunt van de bal. Dan geldt $g(r_1) = r_1$, $g(r_2) = r_2$, dus $g(S) = S$. Laat nu T_i het andere uiteinde van r_i zijn. Er geldt $g(T_i) \in \{S, T_i\}$ en g is een bijectie, dus $g(T_i) \neq S$, dus $g(T_i) = T_i$. We hebben nu 4 vaste punten (M, S, T_1, T_2) van g die niet in één vlak liggen en g is een isometrie, dus $g = \mathrm{id}$.
- Een werking is altijd een homomorfisme $\phi : G \to S(X)$. Elke $g \in G$ werkt dus als element van $S(X)$, dus als bijectie, dus als injectieve afbeelding. Dit heeft niets te maken met het al-dan-niet trouw zijn van de werking. De werking is trouw dan en slechts dan als de afbeelding ϕ zelf injectief is.

Opgave 4. De groep $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ van inverteerbare 2×2-matrices over de reële getallen werkt op het vlak $\mathbf{R}^2$ door de gebruikelijke matrix-vector-vermenigvuldiging (dit hoef je niet te controleren).
Opmerkingen bij 4a – 4c:

- Geef verzamelingen als verzamelingen, dus bijvoorbeeld "$\mathbf{R}^2 \setminus (x\text{-as})$" of "$\{(x, y) : x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}^*\}$", maar absoluut niet als "(x, y), $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}^*$" of "$(0, 1)$".
- Om te bewijzen dat twee deelverzamelingen A en B van J gelijk zijn, moet je de inclusies $A \subset B$ en $B \subset A$ bewijzen.
- Het bewijs van $Z(J) \subset B$ begint met "Zij $x \in Z(J)$. Dan geldt voor alle $y \in J$ ....."

- Introduceer de symbolen die je gebruikt, dus begin niet met “Er moet gelden $xy = yx$” (behalve eventueel in de puzzelfase op een kladblaadje).
- Bij opgave 4b: het gaat om de baan onder H, dus met de werking van H op $\mathbf{R}^2$, niet de werking van heel G.

(a) Bepaal de stabilisator $H = G_{e_1}$ van $e_1 = \binom{1}{0}$ in $\mathbf{R}^2$. [2pt]
Antwoord: $\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : b \in \mathbf{R}, d \in \mathbf{R}^*\}$

(b) Bepaal de baan He_2 van $e_2 = \binom{0}{1}$ onder H. [2pt]
Antwoord: $\{(x, y) : x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}^*\}$

Laat

$$J = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{R}^* \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{R}^* \right\} \subset G.$$

Dit is een ondergroep (dit hoef je niet te controleren).

(c) Bepaal het centrum van J. [3pt]
Antwoord: $Z(J) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbf{R}^* \right\}$.

(d) Bestaat er een injectief homomorfisme $Q \to J$, waarbij Q de quaternionengroep is? [2pt]
Ter herinnering: $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ijk = 1$.
(Opmerking bij opgave: de identiteit $ijk = -1$ uit het dictaat geeft een natuurlijkere presentatie van de groep Q, maar met $ijk = 1$ krijg je een isomorfe groep en wordt de opgave niet moeilijker. Je mag de definitie gebruiken die je wilt.)
Antwoord: nee
Opmerking: Het bewijs begint dan natuurlijk met “stel f is een injectief homomorfisme $Q \to J$”. De volgende opmerking is dat i, j, k orde 4 hebben, en $f(i)$, $f(j)$, $f(k)$ dus ook. Er bestaan wel degelijk elementen in J van orde 4, zelfs oneindig veel, dus je bent hiermee nog niet klaar. Volgende stap: vind een algemene uitdrukking voor de elementen van orde 4 en reken dan $f(ijk) = f(i)f(j)f(k)$ uit.

Opgave 5.

(a) Gegeven een ondergroep $H \subset S_n$. Laat zien: $H \subset A_n$ of H bevat evenveel even als oneven permutaties. [4pt]
Schets: Bekijk de tekenafbeelding $H \to \{\pm 1\}$. De kern daarvan is H zelf of een groep van orde $\#H/2$.

(b) Zij G een groep van orde $4n + 2$ voor een geheel getal n. Laat zien dat G een ondergroep van orde $2n + 1$ bevat. Hint: laat zien dat G een element van orde 2 bevat en gebruik daarna deel (a). [5pt]
Schets:

  – Dit was de moeilijkste opgave van het tentamen.
  – Het getal 2 is een priemdeler van de orde $4n + 2$, dus wegens de stelling van Cauchy heeft G een element g van orde 2

- De banen onder linksvermenigvuldiging met g hebben allemaal lengte 2 (gelijk aan de orde van g).
- Er zijn dus $(4n + 2)/2 = 2n + 1$ banen van lengte 2, dus linksvermenigvuldiging met g is een product van $2n + 1$ transposities, en is dus een oneven permutatie.
- Via de reguliere werking (d.w.z. linksvermenigvuldiging) is G een ondergroep van S_{4n+2} met daarin (zoals boven bewezen) een oneven permutatie.
- Onderdeel a is dus van toepassing en geeft een ondergroep van $2n + 1$ elementen, bestaande uit de even permutaties in G.