Tentamen algebra 1
11 juli 2014, 14:00 – 17:00
Snelliusgebouw, zalen 312 en 412

- Je mag de syllabus en aantekeningen gebruiken, maar geen rekenmachine. Je mag opgaven 2.46, 2.49 en 8.13 gebruiken.
- Bewijs steeds je antwoord en noem de resultaten die je gebruikt.
- Het tentamen bestaat uit 5 opgaven die *niet allemaal evenveel punten* waard zijn en het tentamencijfer is punten/6+1.
- Schrijf bovenaan je papier of je uit Leiden of Delft komt, en schrijf er het studentnummer van je eigen universiteit op.

Opgave 1. Zij D_{28} de diëdergroep met 56 elementen, voortgebracht door een rotatie ρ van orde 28 en een spiegeling σ met $\sigma^2 = \text{id}$ en $\sigma\rho = \rho^{-1}\sigma$.

(a) Heeft D_{28} een element van orde 13? [2pt]

(b) Schrijf $\rho^5\sigma\rho^7\sigma^3\rho$ in de vorm $\rho^i\sigma^j$ met $i, j \in \mathbf{Z}$ en $0 \leq i \leq 27, 0 \leq j \leq 1$. [2pt]

(c) Bepaal voor elk van de volgende tweetallen elementen van D_{28} of ze geconjugeerd zijn.

(i) ρ en ρ^{-1}, [2pt]

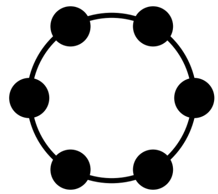
(ii) ρ^3 en ρ^{10}, [2pt]

(iii) ρ^{14} en $\rho^4\sigma$. [2pt]

Opgave 2. Gegeven ρ als in opgave 1. Schrijf $\rho^{2810^{1107}}$ in de vorm ρ^i met $0 \leq i \leq 27$. [10pt]
Waarschuwing: $x^{y^z} = x^{(y^z)} \neq (x^y)^z = x^{y \cdot z}$.

Vergeet de opgaven op de achterkant niet!

Opgave 3. Een *Argentijnse armband* is een armband met 6 kralen, die elk blauw, wit of zwart zijn.



We noemen twee *Argentijnse armbanden* 'hetzelfde' als ze door ruimtelijke rotatie in elkaar overgevoerd kunnen worden (dus de relevante symmetriegroep is D_6).

(a) Hoeveel 'echt verschillende' *Argentijnse armbanden* zijn er? [10pt]

(b) Hoeveel 'echt verschillende' *Argentijnse armbanden* zijn er wanneer elke armband precies 2 blauwe, 2 witte, en 2 zwarte kralen moet hebben? Hint: je mag gebruiken dat er $6!/2^3 = 90$ manieren zijn om een vaste armband te kleuren. [5pt]

Opgave 4. Zijn C_4 een cyclische groep van orde 4, $\mathbf{Q}$ de additieve groep van rationale getallen, $\mathbf{Q}^*$ de multiplicatieve groep van rationale getallen ongelijk aan nul, en D_5 de diëdergroep van orde 10.

(a) Bepaal $\#\mathrm{Hom}(C_4, C_4)$. [2pt]

(b) Bepaal $\#\mathrm{Hom}(C_4, \mathbf{Q})$. [2pt]

(c) Bepaal $\#\mathrm{Hom}(C_4, \mathbf{Q}^*)$. [2pt]

(d) Bepaal $\#\mathrm{Hom}(D_5, C_4)$. [3pt]

Opgave 5.

(a) Zij $\mathbf{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ en zij A de ondergroep van de additieve groep $\mathbf{Q}$ gegeven door [5pt]

$$A = \left\{ \frac{a}{2^n} \in \mathbf{Q} : a \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \right\}.$$

Is de groep A eindig voortgebracht? (Bewijs zoals altijd je antwoord.)

(b) Zij G een groep en H, I normale ondergroepen van G. Stel dat de doorsnede van H en I gelijk is aan $\{e_G\}$. Bewijs dat voor alle $x \in H$ en $y \in I$ geldt dat x en y commuteren. [5pt]

De cijfers komen maandag 14 juli op de webpagina van het vak te staan. Op woensdag 16 juli gaan de cijfers naar de administratie.