Tentamen algebra 1
Woensdag 24 juni 2015, 10:00 – 13:00
Snelliusgebouw B1 (extra tijd), B2, B3, 312

- Je mag de syllabus en aantekeningen gebruiken, maar geen rekenmachine. Je mag opgaven 2.46, 2.49 en 8.13 gebruiken. Verder geldt $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$ en $5 \cdot 13 \cdot 31 = 2015$.
- Bewijs steeds je antwoord en benoem de resultaten die je gebruikt.
- Het tentamen bestaat uit 5 opgaven die elk 9 punten waard zijn en het tentamencijfer is punten/5+1.
- Schrijf op het tentamen of je uit Leiden of Delft komt, en schrijf er het studentnummer van je eigen universiteit op.

Opgave 1. Zij $\sigma : \mathbf{Z}/35\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/35\mathbf{Z}$ gegeven door $\sigma(\overline{k}) = \overline{k} + \overline{4}$. Hier is σ een element van de groep $G = S(\mathbf{Z}/35\mathbf{Z})$ van permutaties van de verzameling $\mathbf{Z}/35\mathbf{Z}$ (hiervan hoef je het bewijs niet te geven).

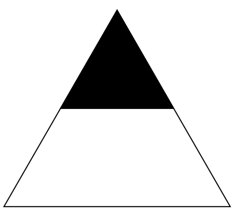
(a) Bepaal de orde van σ. [1pt]

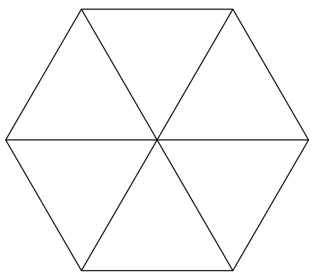
(b) Bepaal $\sigma^{2015^{2406}}(\overline{1})$. Waarschuwing: $x^{y^z} = x^{(y^z)} \neq (x^y)^z = x^{y \cdot z}$. [3pt]

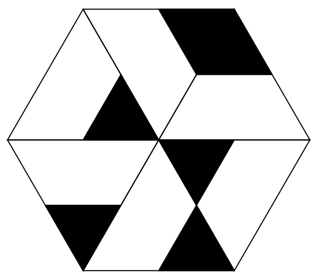
(c) Bepaal $\sigma^{24^{6^{2015}}}(\overline{1})$. [3pt]

(d) Zijn $\tau_1 = (123)(3245)(37)$ en $\tau_2 = (14)(123456)(15) \in S_8$ geconjugeerd? [2pt]

Opgave 2. Een *gerichte driehoek* is een gelijkzijdige driehoek waarvan een kwart zoals getekend in figuur 1 zwart is. [9pt]
Een *zwarte-witte zeshoek* maak je door één gerichte driehoek op elke driehoek in figuur 2 te leggen (in welke oriëntatie dan ook). Het is dus een zeshoek bestaande uit zes gerichte driehoeken. Figuur 3 is een voorbeeld van een zwart-witte zeshoek.
We noemen twee zwart-witte zeshoeken *hetzelfde* als ze door draaiing en/of spiegeling in elkaar overgevoerd kunnen worden. Hoeveel echt verschillende zwart-witte zeshoeken bestaan er?
Je mag je antwoord laten staan in een vorm die bij intikken in een rekenmachine het goede antwoord oplevert.


(figuur 1)


(figuur 2)


(figuur 3)

Vergeet de opgaven op de achterkant niet!

Opgave 3. De voetbal is een veelvlak opgebouwd uit 12 zwarte regelmatige vijfhoeken en 20 witte regelmatige zeshoeken op zo'n manier dat in elk hoekpunt precies 1 vijfhoek en 2 zeshoeken bij elkaar komen. De voetbal is symmetrisch in alle gesuggereerde opzichten. Zij G de symmetriegroep van de voetbal.

(a) Bepaal de orde van de stabilisator en de lengte van de baan van een vijfhoek. Hierbij volstaat een *beknopte* uitleg waarom dit antwoord correct is. [3pt]

(b) Bepaal de orde van G. [2pt]

(c) Werkt G transitief op de verzameling ribben van de voetbal? [2pt]

(d) Werkt G trouw op de verzameling ribben van de voetbal? [2pt]

Opgave 4. De groep $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ van inverteerbare 2×2-matrices over de reële getallen werkt op het vlak $\mathbf{R}^2$ door de gebruikelijke matrix-vector-vermenigvuldiging (dit hoef je niet te controleren).

(a) Bepaal de stabilisator $H = G_{e_1}$ van $e_1 = \binom{1}{0}$ in $\mathbf{R}^2$. [2pt]

(b) Bepaal de baan He_2 van $e_2 = \binom{0}{1}$ onder H. [2pt]

Laat

$$J = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{R}^* \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{R}^* \right\} \subset G.$$

Dit is een ondergroep (dit hoef je niet te controleren).

(c) Bepaal het centrum van J. [3pt]

(d) Bestaat er een injectief homomorfisme $Q \to J$, waarbij Q de quaternionengroep is? [2pt]
Ter herinnering: $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ijk = 1$.

Opgave 5.

(a) Gegeven een ondergroep $H \subset S_n$. Laat zien: $H \subset A_n$ of H bevat evenveel even als oneven permutaties. [4pt]

(b) Zij G een groep van orde $4n + 2$ voor een geheel getal n. Laat zien dat G een ondergroep van orde $2n + 1$ bevat. Hint: laat zien dat G een element van orde 2 bevat en gebruik daarna deel (a). [5pt]

- Na afloop van het tentamen is er een evaluatielunch van de vakken van het Leidse tweede semester Wiskunde in zaal 176 van het Snelliusgebouw.
- Cijfers staan waarschijnlijk morgenavond op de Leidse Blackboardpagina.