Hertentamen algebra 1
Vrijdag 10 juli 2015, 14:00 – 17:00
Snelliusgebouw B1 (extra tijd), B2

- Je mag de syllabus en aantekeningen gebruiken, maar geen rekenmachine. Je mag opgaven 2.46, 2.49, 5.2, 8.13 en 8.18 gebruiken.
- Bewijs steeds je antwoord en benoem de resultaten die je gebruikt.
- Het tentamen bestaat uit 6 opgaven die elk 12 punten waard zijn en het tentamencijfer is punten/8+1.
- Als je dat bij het eerste tentamen nog niet gedaan hebt: schrijf op het tentamen of je uit Leiden of uit Delft komt (anders weet ik niet aan wie ik het cijfer moet doorgeven).
- Cijfers staan over een week op de Leidse Blackboardpagina.

Opgave 1. Definieer de permutaties $\sigma, \tau \in S_8$ door $\sigma = (14623)(12)(357)$, $\tau = (123)(456)(78)$.

(a) Schijf σ als product van disjuncte cykels. [4pt]

(b) Wat is de orde van τ? (let op, τ, niet σ) [4pt]

(c) Schrijf τ^{17} als product van disjuncte cykels. [4pt]

Opgave 2. Voor $a = 20150710$, $b = 10072015$, $x = -113084$, $y = 226243$ geldt $xa + yb = 5$.

(a) Bestaat er een getal $z \in \mathbf{Z}$ met $z \equiv 11 \bmod a$ en $z \equiv 17 \bmod b$? Zo ja, vind zo'n getal, zo nee, bewijs dat het niet bestaat. Je mag je antwoord laten staan in een vorm die bij intikken in een rekenmachine het goede antwoord oplevert. [4pt]

(b) Als (a), maar dan met $z \equiv 15 \bmod a$ en $z \equiv 10 \bmod b$. [4pt]

(c) Laat zien dat voor elk element $x \in (\mathbf{Z}/2015\mathbf{Z})^*$ geldt $x^{60} = \overline{1}$. Hint: $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. [4pt]

Opgave 3. Hoeveel homomorfismen bestaan er van G_1 naar G_2 voor

(a) $G_1 = D_5$, $G_2 = \mathbf{R}^*$? [4pt]

(b) $G_1 = V_4$, $G_2 = C_{20}$? [4pt]

(c) $G_1 = C_6$, $G_2 = S_5$? [4pt]

Bewijs zoals altijd je antwoorden. In bovenstaande is D_n de diëdergroep van orde $2n$.

Vergeet de opgaven op de achterkant niet!

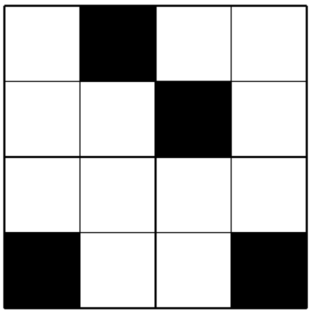
Opgave 4. Een *zwart-wit zestienvlak* is een vierkant frame gevuld met 16 vierkante glasplaten dat voldoet aan de volgende eis. Van elk van de glasplaten 1 t/m 4 in Figuur 1 is er één zwart en zijn er drie wit, en hetzelfde geldt voor de glasplaten 5 t/m 8, voor de glasplaten 9 t/m 12 en voor de glasplaten 13 t/m 16. [12pt]

Figuur 2 is een voorbeeld van een zwart-wit zestienvlak. Figuur 3 is *geen* voorbeeld van een zwart-wit zestienvlak.

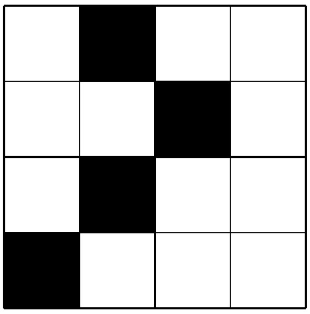
We noemen twee zwart-witte zestienvlakken *hetzelfde* als ze door draaiing en/of omkering in elkaar overgevoerd kunnen worden. De relevante groep is hier dus D_4. Hoeveel echt verschillende zwart-witte zestienvlakken bestaan er?
Je mag je antwoord laten staan in een vorm die bij intikken in een rekenmachine het goede antwoord oplevert.

1	2	5	6
3	4	7	8
9	10	13	14
11	12	15	16

Figuur 1



Figuur 2
Een zwart-wit zestienvlak



Figuur 3
GEEN zwart-wit zestienvlak

Opgave 5. De productgroep $G = (\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^*)$ werkt op het assenkruis

$$X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x = 0 \text{ of } y = 0\}$$

door

$$(a, b)(x, y) = (ax, by).$$

(a) Bepaal de baan van $(1, 0) \in X$. [3pt]

(b) Bepaal de stabilisator van $(1, 0) \in X$. [3pt]

(c) Bepaal het aantal G-banen in X. [3pt]

(d) Is deze werking trouw? [3pt]

Opgave 6. Zij G een groep en $H \subset G$ een eindige ondergroep.

(a) Laat zien dat de formule [3pt]

$$(h, h')(x) = hxh'^{-1}$$

een werking van de productgroep $H \times H$ op G definieert.

(b) Laat zien dat de baan van het eenheidselement gelijk is aan H. [2pt]

(c) Bewijs: H is een normaaldeler van G dan en slechts dan als elke baan evenveel elementen bevat als H. [7pt]