Hertentamen Algebra 1

Vrijdag 8 juli 2016, 14:00 – 17:00

Snelliusgebouw, zalen 407/409 en 174

- Bij dit tentamen mag het dictaat "Algebra 1" van Peter Stevenhagen gebruikt worden, maar geen uitwerkingen van opgaven en geen rekenmachines of andere elektronische hulpmiddelen. Eventuele onderstrepingen, markering of korte hoorcollege-notities in het dictaat zijn geen probleem, zolang het geen (gedeeltes van) werkcollege-notities of uitwerkingen van opgaven of oude tentamens zijn.
- Je mag opgaven 2.46, 2.49, 4.10, 5.2 en 8.13 gebruiken zonder ze op te lossen.
- Alle opgaven zijn evenveel punten waard, niet alle deelopgaven zijn evenveel punten waard.
- Benoem de resultaten die je gebruikt. Bewijs altijd je antwoord, tenzij expliciet in de opgave staat dat het niet hoeft.
- Cijfers staan waarschijnlijk maandagavond 11 juli op de Leidse Blackboardpagina.

Opgave 1.

(a) Bepaal de rest bij deling door 100 van 102^{183}.

(b) (i) Bepaal het aantal positieve gehele getallen $x \leq 180000$ waarvoor geldt $x \equiv 8 \bmod 15$ en $x \equiv 3 \bmod 4$.

(ii) Dezelfde vraag, maar nu met $x \equiv 2 \bmod 15$ en $x \equiv 3 \bmod 9$.

(iii) Dezelfde vraag, maar nu met $x \equiv 2 \bmod 15$ en $x \equiv 8 \bmod 9$.

Opgave 2. Zij $\tau = (132)(2354)(164)(78) \in S_9$ en $\sigma = (12345)(67)(89) \in S_9$.

(a) Bepaal de disjunctecykelnotatie van τ.

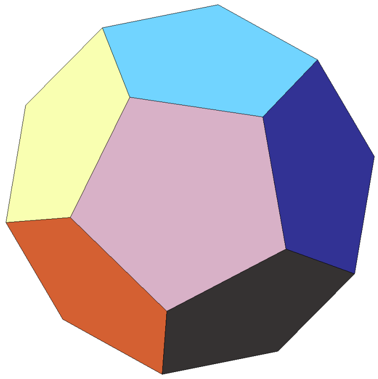
(b) Bepaal de verzameling van banen in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ onder de werking van $\langle\tau\rangle$.

(c) Bepaal de disjunctecykelnotatie van σ^{107}.

(d) Bepaal het kleinste positieve gehele getal n waarvoor S_n een element bevat van orde 20.

Vergeet de opgaven op de achterkant niet!

Opgave 3.



(a) De dodecaëder is het regelmatige twaalfvlak. Zie de figuur. Bepaal de orde van de symmetriegroep van de dodecaëder. Je mag schetsmatig zijn in de meetkundige aspecten van je bewijs.

(b) Zij $I_2(\mathbf{R})$ de isometriegroep van het vlak. Geef aan welke tweetallen van de volgende vier elementen van $I_2(\mathbf{R})$ met elkaar geconjugeerd zijn en welke niet. Bewijs je antwoord.

- de rotatie $\rho_{37,(0,0)}$ van 37 graden tegen de klok in rond de oorsprong,
- de rotatie $\rho_{37,(5,0)}$ van 37 graden tegen de klok in rond het punt $(5, 0)$,
- de translatie $\tau_{(5,0)} : P \mapsto P + (5, 0)$,
- de translatie $\tau_{(0,5)} : P \mapsto P + (0, 5)$.

Opgave 4. Geef *zonder bewijs* voor elk van de volgende werkingen aan of deze

(A) transitief is,

(B) trouw is,

(C) dekpuntsvrij is,

Er worden dus $3 \times 5 = 15$ antwoorden ("ja"/"nee") verwacht in een overzichtelijke tabel. Je zou ze allemaal moeten kunnen bewijzen, maar zo niet: gokken loont! Naar het bewijs wordt niet gekeken.

(i) De werking van de symmetriegroep van de tetraëder op de verzameling hoekpunten van de tetraëder.

(ii) De werking van $\mathbf{Z}$ op $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ gegeven door $k \circ (\bar{a}, \bar{b}) = (\overline{k + a}, \bar{b})$.

(iii) De werking van $\mathbf{R}$ op $\mathbf{R}^2$ gegeven door: $a \in \mathbf{R}$ werkt als rotatie ρ_a om de oorsprong met een hoek van a graden tegen de klok in.

(iv) De conjugatiewerking van S_4 op S_4.

(v) De werking van $\mathbf{R}^2$ op $\mathbf{R}$ gegeven door $(a, b) \circ x = a + x$.

Opgave 5. De groep A_4 is de groep van even permutaties in S_4. Deze groep heeft 12 elementen. Geef een tabel met voor alle niet-negatieve gehele getallen $n \leq 12$ het aantal ondergroepen $H \subset A_4$ van orde n. Bewijs je antwoord.