Algebra 1

Dinsdag 11 juli 2017, 14:00 - 17:00

- Bij dit tentamen mag het dictaat "Algebra 1" van Peter Stevenhagen gebruikt worden, maar geen uitwerkingen van opgaven en geen rekenmachines of andere elektronische hulpmiddelen. Eventuele onderstrepingen, markering of korte hoorcollege-notities in het dictaat zijn geen probleem, zolang het geen (gedeeltes van) werkcollege-notities of uitwerkingen van opgaven of oude tentamens zijn.
- Je mag opgaven 2.46, 2.49, 4.10, 5.2 en 8.13 gebruiken zonder ze op te lossen.
- Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven die allemaal evenveel punten waard zijn. Niet alle deelopgaven zijn evenveel punten waard.
- Benoem de resultaten die je gebruikt. Bewijs altijd je antwoord, tenzij expliciet in de opgave staat dat het niet hoeft.

Opgave 1. (a) Geef alle gehele getallen x die voldoen aan

$$\begin{aligned} 0 \leq x &< 1032231, \\ x &\equiv -1 \pmod{1011} \quad \text{en} \\ x &\equiv \ \ 2 \pmod{1021}. \end{aligned}$$

(b) Voor de 15-cykel $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15) \in S_{20}$, geef de disjunctecykelrepresentatie van $\sigma^{13^{2017}} \in S_{20}$.
[Let op: $a^{b^c} = a^{(b^c)} \neq (a^b)^c = a^{(bc)}$.]

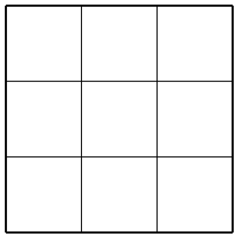
Opgave 2. Bepaal voor elk van de volgende drie situaties of de twee elementen geconjugeerd zijn in de gegeven groep.

(a) $(316)(517)(261)$ en $(651)(617)(253)$ in S_7;

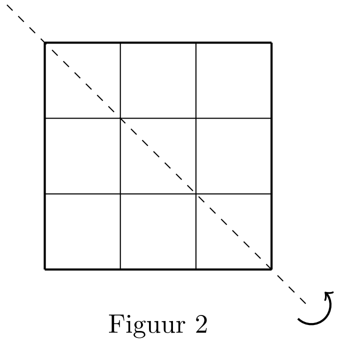
(b) 5 en 6 in de additieve groep $\mathbf{Q}$ van rationale getallen;

(c) de spiegelingen σ_x en σ_y in de x-as respectievelijk y-as in D_4.

Opgave 3. Een *negenraam* is een vierkant raamwerk bestaande uit 3×3 vierkante openingen als in Figuur 1. De groep van ruimtelijke rotatiesymmetrieën van het negenraam is isomorf met D_4 en bevat bijvoorbeeld de rotatie om de diagonaal van het negenraam als in Figuur 2.



Figuur 1



Figuur 2

(a) Een *negenruit* is een negenraam, met daarin negen plaatjes van gekleurd glas, waarvoor de kleuren rood en blauw beschikbaar zijn.

We noemen twee negenruiten *"hetzelfde"* als ze door ruimtelijke rotatie in elkaar overgevoerd kunnen worden. Hoeveel "echt verschillende" negenruiten bestaan er?

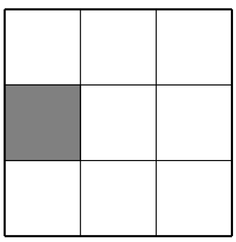
Geef je antwoord expliciet als decimaal getal, niet als som.

(b) Een *negentegel* is een negenraam, met daarin negen plastic plaatjes die allemaal één zwarte en één witte kant hebben. Zie Figuur 3 voor een bovenaanzicht van een voorbeeld van een negentegel. We noemen twee negentegels *"hetzelfde"* als ze door ruimtelijke rotatie in elkaar overgevoerd kunnen worden.

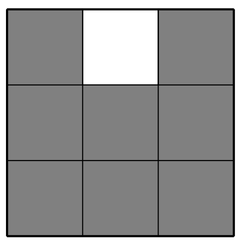
Een voorbeeld ter verduidelijking. Als we de rotatie uit Figuur 2 toepassen op de negentegel van Figuur 3, dan krijgen we de negentegel van Figuur 4: plaatjes die eerst met de witte kant naar boven lagen, komen met de zwarte kant naar boven te liggen, en andersom. De negentegels van Figuren 4 en 5 zijn dus "hetzelfde".

Hoeveel "echt verschillende" negentegels bestaan er?

Geef je antwoord expliciet als decimaal getal, niet als som.



Figuur 3



Figuur 4

Opgave 4. (a) Geef *zonder bewijs* voor elk van de volgende werkingen aan of deze

(A) transitief is,

(B) trouw is,

(C) dekpuntsvrij is.

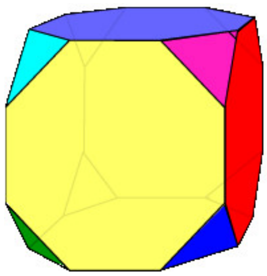
Er worden dus $3 \times 3 = 9$ antwoorden ("ja"/"nee") verwacht in een overzichtelijke tabel. Je zou ze allemaal moeten kunnen bewijzen, maar zo niet: gokken loont! Naar het bewijs wordt niet gekeken.

(i) De werking van $\mathbf{R}^*$ op $\mathbf{R}$ door vermenigvuldiging.

(ii) De werking van $\mathbf{R}$ op $\mathbf{R}^2$ door $x \circ (y, z) = (y + x, z + x)$.

(iii) Voor een echte ruit R (dus geen vierkant), de werking van $V_4 = \mathrm{Sym}(R)$ op de verzameling van diagonalen van R.

(b) Een *afgeknotte kubus* is het object dat je krijgt als je van een kubus bij elk hoekpunt evenveel afschaaft en een gelijkzijdige driehoek maakt. Laat G de symmetriegroep van de afgeknotte kubus zijn (inclusief spiegelingen).



(i) Bepaal de orde van de stabilisator en de lengte van de baan van een hoekpunt onder de werking van G. Hier volstaat een beknopte uitleg waarom je antwoord correct is.

(ii) Bepaal de orde van G.

Opgave 5. Laat G een *abelse* groep zijn en $x, y \in G$ twee elementen die samen heel G voortbrengen. We nemen aan dat x en y eindige orde m respectievelijk n hebben.

(a) Geef een surjectief homomorfisme $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to G$.

(b) Laat zien dat de orde van G een deler van mn is.

(c) Stel dat m en n copriem zijn. Bewijs dat G cyclisch is van orde precies mn.
[Je mag opgave 7.15 niet gebruiken en hebt geen stof uit hoofdstuk 7 nodig.]