

**Tentamen Lineaire algebra 1 voor
natuurkundestudenten
4 januari 2010, 14:00–17:00**

Het tentamen is *geen* open-boek-tentamen. Alleen de hulp van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan.

Motiveer al je antwoorden!

Opgave 1. Voor elk getal $x \in \mathbb{R}$ beschouwen we de matrix

$$A_x = \begin{pmatrix} 2 & 0 & x \\ 0 & -x & -1 \\ 1 & 2 & x \end{pmatrix}.$$

- (a) Geef de inverse van A_0 .
- (b) Geef een basis van de kern van A_2 .
- (c) Voor welke $x \in \mathbb{R}$ is A_x inverteerbaar?

Opgave 2. Laat $L \subset \mathbb{R}^3$ de lijn zijn door de punten $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Laat $V \subset \mathbb{R}^3$ het vlak zijn met vergelijking $x - y + 3z = 6$.

- (a) Bereken het snijpunt van L en V .
- (b) Welke rechte lijn door de oorsprong snijdt V niet, maar L wel?

Opgave 3. Definieer de matrix A door

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 8 & -1 \\ 1 & 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Wat is de rang van A ?
- (b) Geef een basis van de kern van A .
- (c) Geef een basis van het beeld van A .

Opgave 4. Bereken de determinant van de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Opgave 5. Laat $A = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$.

- (a) Wat zijn de eigenwaarden en eigenruimten van A ?
- (b) Geef een inverteerbare matrix C en een diagonaalmatrix D zodat $A = CDC^{-1}$.
- (c) Geef een formule voor de n -de macht van A , waarbij $n = 1, 2, 3, \dots$

Opgave 6. Voor de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & \sqrt{1/2} \\ 1/2 & -1/2 & -\sqrt{1/2} \\ \sqrt{1/2} & \sqrt{1/2} & 0 \end{pmatrix}$$

is de afbeelding $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die een vector v stuurt naar Av een rotatie (dit hoef je niet te bewijzen).

- (a) Welke lijn is de rotatie-as?
- (b) Hoe groot is de hoek van de rotatie?