

**Tentamen Lineaire algebra 1 voor  
natuurkundestudenten  
25 maart 2010, 14:00–17:00**

Het tentamen is *geen* open-boek-tentamen. Alleen de hulp van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan.

**Motiveer** al je antwoorden!

**Opgave 1.** Voor elk getal  $x \in \mathbb{R}$  beschouwen we de matrix

$$A_x = \begin{pmatrix} x & 1 & x \\ 2 & -x & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Geef de inverse van  $A_0$ .
- (b) Geef een basis voor de kern van  $A_1$ .
- (c) Voor welke  $x \in \mathbb{R}$  is  $A_x$  inverteerbaar?

**Opgave 2.** Laat  $L$  de lijn in  $\mathbb{R}^3$  zijn door de oorsprong en het punt  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- (a) Bereken de afstand van het punt  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  tot  $L$ .
- (b) Laat  $V$  het vlak zijn dat door het punt  $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  gaat en dat loodrecht staat op de lijn door de oorsprong en  $Q$ . Bereken het snijpunt van  $L$  en  $V$ .

**Opgave 3.** Definieer de matrix  $A$  door

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Wat is de rang van  $A$ ?
- (b) Geef een basis van de kern van  $A$ .
- (c) Geef een basis van het beeld van  $A$ .

**Opgave 4.** Bereken de determinant van de matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**Opgave 5.** Laat  $A$  de matrix  $\begin{pmatrix} 11 & 9 \\ -12 & -10 \end{pmatrix}$  zijn.

- (a) Wat zijn de eigenwaarden en eigenruimten van  $A$ ?
- (b) Geef een inverteerbare matrix  $C$  en een diagonaalmatrix  $D$  zodat  $A = CDC^{-1}$ .

**Opgave 6.** Voor de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & -2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

is de afbeelding  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die een vector  $v$  stuurt naar  $Av$  een spiegeling in een vlak (dit hoef je niet te bewijzen).

- (a) In welk vlak is dit een spiegeling?
- (b) Wat is de matrix van de afbeelding  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die elk punt projecteert op dit vlak?