Deze tekst geldt als aanvulling op Par. 2.5 uit Fraleigh-Beauregard.

Een **affiene deelruimte** of **flat** in $\mathbb{R}^n$ is een deelverzameling P van de vorm

$$P = a + W = \{a + w \mid w \,\text{in}\, W\}$$

met a een vector in $\mathbb{R}^n$ en W een deelruimte van $\mathbb{R}^n$. De **dimensie** $\dim(P)$ van P is de dimensie van W. We noemen P een **lijn** als $\dim(P) = 1$, en een **vlak** als $\dim(P) = 2$.

Voorbeeld: het vlak P in $\mathbb{R}^3$ door $(1,0,1), (-1,2,0), (3,1,1)$ kan geschreven worden als $P = a + W$ met

$$a = (1,0,1) \quad \text{en} \quad W = \operatorname{span}((-2,2,-1),(2,1,0)).$$

Algemeen: stel $v_0, \ldots, v_k$ zijn $k+1$ vectoren in $\mathbb{R}^n$, en stel $v_1 - v_0, \ldots, v_k - v_0$ zijn lineair onafhankelijk. Dan noemen we

$$P = v_0 + \operatorname{span}(v_1 - v_0, \ldots, v_k - v_0)$$

de **affiene deelruimte opgespannen door** $v_0, \ldots, v_k$. We noemen v_0 een **steunvector** van P en $v_1 - v_0, \ldots, v_k - v_0$ **richtingsvectoren** van P. Er geldt nu $\dim(P) = k$.

Stel P en Q zijn affiene deelruimtes van $\mathbb{R}^n$ die elkaar *niet* snijden (bijvoorbeeld twee kruisende lijnen). De *afstand* tussen P en Q, notatie $d(P,Q)$ is het minimum van alle $\|p-q\|$ waarbij p door P loopt en q door Q. Dit minimum bestaat, is positief, en wordt aangenomen door een p en q zodat $p-q$ loodrecht staat op alle richtingsvectoren van P en alle richtingsvectoren van Q.

Voorbeeld: zij P de lijn in $\mathbb{R}^3$ door $(1,0,1), (3,1,0)$ en Q de lijn in $\mathbb{R}^3$ door $(-1,1,0), (-2,1,1)$. Deze lijnen snijden elkaar niet (ga dit zelf na). De afstand tussen P en Q kunnen we nu als volgt bepalen. We hebben

$$P = (1,0,1) + \operatorname{span}(2,1,-1) \quad , \quad Q = (-1,1,0) + \operatorname{span}(-1,0,1).$$

Laat $p = (1,0,1) + r(2,1,-1)$ een willekeurige vector in P, en $q = (-1,1,0) - s(-1,0,1)$ een willekeurige vector in Q. Er geldt $p - q = (2,-1,1) + r(2,1,-1) + s(-1,0,1)$. De voorwaarde dat $p - q$ loodrecht staat op elke richtingsvector in P vertaalt zich als

$$((2,-1,1) + r(2,1,-1) + s(-1,0,1)) \cdot (2,1,-1) = 0$$

(de $\cdot$ staat voor inproduct) oftewel $2 + 6r - 3s = 0$. De voorwaarde dat $p - q$ loodrecht staat op elke richtingsvector in Q vertaalt zich als

$$((2,-1,1) + r(2,1,-1) + s(-1,0,1)) \cdot (-1,0,1) = 0$$

oftewel $-1 - 3r + 2s = 0$. Oplossen van r, s op de gebruikelijke wijze levert $s = 0, r = -1/3$. Voor deze r, s vinden we $p - q = (4/3, -4/3, 4/3)$ en $\|p-q\| = \sqrt{3 \cdot (4/3)^2} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$. De afstand tussen P en Q is dus $\frac{4}{3}\sqrt{3}$.