Uitwerking extra opgaven LA1NA, 14 September 2016

(1)
(a) De richtingsvector van de lijn tussen $(2,3)$ en $(1,1)$ is $(2,3)-(1,1) = (1,2)$. Een parametervoorstelling van L is dus

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} r : r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Merk op dat we voor $r = 0$ de vector $(1,1)$ krijgen en voor $r = 1$ de vector $(2,3)$.

(b) De lijn L bestaat uit alle punten (x,y) zodanig dat

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} r$$

voor een $r \in \mathbb{R}$. Dit geeft ons twee vergelijkingen:

$$\begin{aligned} x &= 1 + r \\ y &= 1 + 2r. \end{aligned}$$

Door in dit stelsel r te elimineren krijgen wij de vergelijking $2x - y = 1$.

(c) Schrijf $Q = (x,y)$. We willen dat de richtingsvector van de lijn tussen P en Q loodrecht staat op de richtingsvector van L:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

Omdat Q op L ligt, hebben wij $Q = (1,1) + (1,2)r$ voor een geschikte $r \in \mathbb{R}$. Dus, wij willen een r vinden zodat

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} r, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

Door deze vergelijking op te lossen krijgen wij $r = 6/5$ en dus $Q = (11/5, 17/5)$.

(d) De dichtsbijzijnde punt op L van P is Q, en dus de afstand die wij zoeken is

$$\sqrt{\left(\frac{11}{5} - 1\right)^2 + \left(\frac{17}{5} - 4\right)^2} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

(2) (a) De normaalvector van V is $(1,1,-2)$. Dit is ook de richtingsvector van de lijn die loodrecht staat op V. Dus, een parametervoorstelling van L is

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} r : r \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Wij willen een punt Q op V vinden dat ook op L ligt. Omdat Q op L ligt kunnen wij $Q = (3,4,-3) + (1,1,-2)r$ schrijven voor een geschikte $r \in \mathbb{R}$. Omdat Q op V ligt voldoet hij aan $\langle Q, (1,1,-2) \rangle = 1$. Dus, wij willen

$$\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} r, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 1.$$

Door deze vergelijking op te lossen krijgen wij $r = -2$ en dus $Q = (1,2,1)$. Dan is de afstand die wij willen gelijk aan

$$\sqrt{(1-3)^2 + (2-4)^2 + (1+3)^2} = 2\sqrt{6}.$$

(3)

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ A^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \\ A^{100} &= A^{99} \cdot A = \left(A^3\right)^{33} \cdot A = I^{33} \cdot A = A. \end{aligned}$$