Lineaire Algebra 1 voor Natuur- en Sterrenkunde
Huiswerkset 5
Deadline: 10 december 2018, 11:00 uur
Motiveer al je antwoorden.
Zie ook de huiswerkregels op
`http://pub.math.leidenuniv.nl/~strengtc/la1na_2018/index.php?menu=huiswerk`

Opgave 1. Laat $G_0 = 0$, $G_1 = 1$ en definieer G_k voor $k \geq 2$ door de recurrente betrekking

$$G_k = -2G_{k-1} + 3G_{k-2}\,.$$

We hebben dus bijvoorbeeld $G_2 = -2$ en $G_3 = 7$.

(a) Geef een 2×2-matrix A zodat voor alle $k \geq 0$ geldt:

$$\begin{pmatrix} G_{k+1} \\ G_k \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

(c) Geef een inverteerbare matrix C en een diagonaalmatrix D zodat $A = CDC^{-1}$.

(d) Geef een gesloten formule voor G_k.

Opgave 2. Bepaal functies x_1, x_2, x_3 (van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$) die voldoen aan

$$\begin{aligned} x_1' &= -4x_1 \phantom{{}+x_2} + 3x_3, & x_1(0) &= 1,\\ x_2' &= -4x_1 + x_2 + 2x_3, & x_2(0) &= 0,\\ x_3' &= -6x_1 \phantom{{}+x_2} + 5x_3, & x_3(0) &= -1. \end{aligned}$$

Opgave 3. Gegeven $w_1 = (1, 1, -1, 1)$, $w_2 = (1, 4, 0, 3)$ en $w_3 = (3, -2, -2, 1)$, laat $W = \operatorname{span}(w_1, w_2, w_3) \subset \mathbb{R}^4$.

(a) Bepaal een basis van het orthogonaal complement $W^\perp$ van W.

(b) Bepaal een orthonormale basis van W.

(c) Bepaal de loodrechte projectie van $b = (1, 1, 1, 0)$ op W.