Lineaire algebra 2: huiswerkset 1
(herhaling en Sectie 2)
Deadline: 18 september 2013, 9:00 uur

(H1.1) Laat zien dat de (2×2)-matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

diagonaliseerbaar is over de reële getallen $\mathbf{R}$ voor alle $a \in \mathbf{R}$. Kun je hetzelfde laten zien als we $\mathbf{R}$ vervangen door de complexe getallen $\mathbf{C}$?

(H1.2) Bepaal voor elk van de volgende matrices A of er een basis van eigenvectoren bestaat in $\mathbf{R}^3$.
Zo ja, geef zo'n basis en schrijf $A = QDQ^{-1}$ voor $Q, D \in \mathrm{Mat}(3, \mathbf{R})$ met D diagonaal en Q inverteerbaar.
Zo nee, geef een bewijs dat zo'n basis niet bestaat.

$$\text{(i)} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(H1.3) Bepaal het karakteristiek polynoom van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

en bereken A^{100}. Hint: gebruik Cayley-Hamilton.

(H1.4) Zij V de vierdimensionale vectorruimte van polynomen over $\mathbf{R}$ van graad ten hoogste 3. Zij $T : V \to V$ de lineaire afbeelding die elk polynoom $p(x)$ stuurt naar $p(x) + p''(x)$, waarbij $p''(x)$ de tweede afgeleide is.
(i) Bepaal het karakteristiek polynoom en het minimumpolynoom van T.
(ii) Is T diagonaliseerbaar?