Oefensommen tentamen Lineaire algebra 2 - december 2012

Opg. 1. De schaakbordmatrix A is de 8 bij 8 matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Bereken de beeldruimte en de rang van A.
2. Laat zien dat de beeldruimte van A een eigenruimte is van A, en bepaal de eigenwaarde.
3. Laat zien dat A diagonaliseerbaar is.
4. Geef het minimum polynoom van A.
5. Geef het karakteristiek polynoom van A.

Opg. 2. Bepaal alle $x \in \mathbb{R}$ waarvoor de matrix

$$\begin{pmatrix} -x & 3 & -15 \\ x & -4 & 17 \\ 4 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

nilpotent is.

Opg. 3. In deze opgave is steeds de vraag of er een reële 4×4-matrix A bestaat met de gevraagde eigenschap. Geef zo'n matrix A of bewijs dat die niet bestaat. Laat I de 4×4-identiteitsmatrix zijn.

1. $A^2 = 0$ en A heeft rang 1;
2. $A^2 = 0$ en A heeft rang 2;
3. $A^2 = 0$ en A heeft rang 3;

4. A heeft rang 2, en $A - I$ heeft rang 1;
5. A heeft rang 2, en $A - I$ heeft rang 2;
6. A heeft rang 2, en $A - I$ heeft rang 3.

Opg. 4. Geef de Jordan normaalvorm van de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Opg. 5. Laat F de reële vectorruimte van differentieerbare functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ zijn. Definieer voor $i = 0, 1, 2$ de functie $p_i \in F$ door $p_i(x) = x^i$, en laat V de deelruimte van F zijn die wordt opgespannen door p_0, p_1 en p_2.

1. Bewijs dat V dimensie 3 heeft.

Laat de lineaire afbeelding $T\colon V \to V$ gegeven zijn door $T(f) = f - f'$, waarbij f' de afgeleide van f is.

2. Wat zijn de gegeneraliseerde eigenruimten van T op V?
3. Geef de Jordan-normaalvorm van T.
4. Geef lineaire afbeeldingen $D, N\colon V \to V$, met D diagonaliseerbaar, N nilpotent, $DN = ND$, en $T = D + N$.
5. Bereken $T^{100}(p_2)$.

Opg. 6. Laat $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Bereken de gegeneraliseerde eigenruimten van A.
2. Geef matrices D, N, met D diagonaliseerbaar, N nilpotent, $DN = ND$, en $A = D + N$.
3. Bereken e^A.

Opg. 7. Geef het kararakteristiek polynoom, de eigenwaarden, de eigenruimten, de gegeneraliseerde eigenruimten en de Jordan normaalvorm van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Opg. 8. Laat V_n de vectorruimte van polynomen van graad hoogstens n zijn met coëfficienten in $\mathbb{R}$. Definieer $\phi_i \in V_n^*$ voor $i \geq 1$ door $\phi_i(f)$ gelijk te stellen aan de waarde van de i-de afgeleide van f in 1.

1. Laat zien dat $\phi_0, \ldots, \phi_n$ lineair onafhankelijk zijn.
2. Laat zien dat er constanten $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ zijn zodat voor alle $f \in V_n$ geldt:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = c_0 f(1) + c_1 f'(1) + ... + c_n f^{(n)}(1).$$

Opg. 9. Geef de Jordan normaalvorm van de matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Opg. 10. Beschouw de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Geef de eigenwaarden en eigenruimten van A.
2. Geef een diagonaalmatrix D en een nilpotente matrix N waarvoor geldt $D + N = A$ en $DN = ND$.
3. Geef een formule voor A^n met $n = 1, 2, 3, \ldots$

Opg. 11. Beschouw de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Bepaal het karakteristieke polynoom van A.

2. Bepaal de eigenwaarden van A.

3. Is A diagonaliseerbaar?

Opg. 12. Laat $f : V \to W$ een lineaire afbeelding zijn tussen eindig dimensionale vectorruimte, en laat U een deelruimte zijn van V. Stel dat U in de kern van $f^T(\phi)$ bevat is voor alle $\phi \in W^*$. Laat zien dat $f(U) = 0$.

Opg. 13. Laat V de vectorruimte van alle functies $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zijn. Laat W de deelruimte van V zijn, die wordt opgespannen door de drie functies $x \mapsto x$, $x \mapsto \sin(x)$, en $x \mapsto e^x$.

1. Laat zien dat de afbeelding φ: $V \to \mathbb{R}^3$ die $f \in V$ stuurt naar $\varphi(f) = (f(0), f(1), f(\pi))$ lineair is.

2. Laat zien dat $\phi(W)$ dimensie 3 heeft, en dat W dimensie 3 heeft.

3. Bewijs dat er getallen $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ bestaan zodat voor alle $f \in W$ geldt: $f'(0) = a_1 f(0) + a_2 f(1) + a_3 f(\pi)$. Hier is f' de afgeleide van f.

Opg. 14. Laat V een vectorruimte zijn over $\mathbb{R}$ en $B : V \times V \to \mathbb{R}$ een symmetrische bilineaire afbeelding. Als voor vectoren $x, y \in V$ geldt dat $B(x, x) \geq 0$ en $B(y, y) \geq 0$, geldt dan ook $B(x + y, x + y) \geq 0$?

Opg. 15. Laat V een vectorruimte zijn over $\mathbb{R}$ van dimensie 3, en laat $B : V \times V \to \mathbb{R}$ een symmetrische bilineaire afbeelding zijn. Stel dat U een 2- dimensionale deelruimte is van V met $B(U, U) = 0$. Laat zien dat B gedegenereerd is.

Opg. 16. Laat V een eindig dimensionale vectorruimte over $\mathbb{R}$ zijn, en laat $B : V^* \times V^* \to \mathbb{R}$ een bilineaire afbeelding zijn. Laat zien dat er voor elke $f \in V^*$ een $v \in V$ is met $B(f, g) = g(v)$ voor alle $g \in V^*$.

Opg. 17. Laat V een eindig dimensionale vectorruimte zijn over $\mathbb{R}$, en laat $B : V \times V^* \to \mathbb{R}$ een bilineaire afbeelding zijn die niet gedegenereerd is. Laat zien dat er een isomorfisme $f : V \to V$ is zodat $B(v, \phi) = \phi(f(v))$ voor alle $v \in V$ en $\phi \in V^*$.

Opg. 18. Voor $x \in \mathbb{R}$ beschouwen we de symmetrische matrix

$$A_x = \begin{pmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$$

1. Wat is de signatuur van A_1, en van A_{-1}?

2. Voor welke x is A_x positief definiet?

3. Voor welke x is $\begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ -1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ positief definiet?

Opg. 19. Voor $x \in \mathbb{R}$ beschouwen we de symmetrische matrix

$$A_x = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$$

1. Wat is de signatuur van A_0, en van A_2?

2. Voor welke x is A_x positief definiet?

3. Voor welke x is $\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}$ positief definiet?

4. Voor welke x is $\begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ positief definiet?

Opg. 20. Laat $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4\colon\ x + iy - z - iw = 0\}$.

1. Geef een basis van V als vectorruimte over $\mathbb{C}$.

2. Geef een basis van V als vectorruimte over $\mathbb{R}$.

3. Geef een orthonormale basis van V als vectorruimte over $\mathbb{C}$, met het standaard hermites inproduct van $\mathbb{C}^4$.

Opg. 21. Laat V de vectorruimte over $\mathbb{C}$ zijn van alle continue functies $[0, 1] \to \mathbb{C}$. Definieer B: $V \times V \to \mathbb{C}$ door $B(f, g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(1-t)}dt$.

1. Is B bilineair?

2. Is B sesquilineair?

3. Is B een Hermitese vorm (Engels: “Hermetian form”) op V?

4. Is B een inproduct op V?

(Motiveer je antwoorden.)

Opg. 22. Stel dat A de 3×3-matrix is van een rotatie over 90 graden om een lijn in $\mathbb{R}^3$. Laat zien dat $A^T + A$ rang 1 heeft.

Opg. 23. Laat zien dat de matrix van een spiegeling in een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$ symmetrisch is.

Opg. 24. Laat V de 1-dimensionale deelruimte zijn van de reële vectorruimte $\mathbb{R}^3$ die wordt opgespannen door de vector $(2, -1, 1)$. Laat $\sigma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de spiegeling in V zijn.

1. Geef de matrix van σ ten opzichte van de standaardbasis van $\mathbb{R}^3$.
2. Geef een basis van $\mathbb{R}^3$ bestaande uit eigenvectoren van σ.
3. Is σ een normale afbeelding?

Opg. 25. Beschouw de kwadratische vorm $q(x, y) = 11x^2 - 16xy - y^2$.

1. Bepaal een symmetrische matrix A zodat
$$q(x, y) = (x, y)\ A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$
2. Bepaal twee reële getallen a, b en een orthogonale afbeelding f van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$ zodat $q(f(u, v)) = au^2 + bv^2$ voor all $u, v \in \mathbb{R}$.
3. Welke waarden neemt $q(x, y)$ aan op de eenheidscirkel $x^2 + y^2 = 1$?